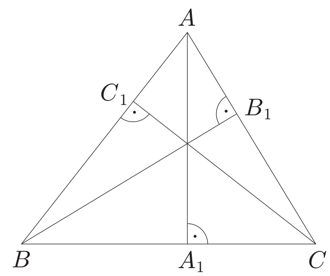
Tudjuk, hogy

$$AA_1 \cdot BC = BB_1 \cdot CA = CC_1 \cdot AB = 2t. \tag{1}$$

Ha a háromszög szabályos, akkor $AB = BC = CA$, tehát

$$\begin{gathered} AA_1 \cdot AB + BB_1 \cdot BC + CC_1 \cdot CA = \\ = AA_1 \cdot BC + BB_1 \cdot CA + CC_1 \cdot AB = 6t, \end{gathered}$$

vagyis teljesül a feladatban szereplő egyenlőség.



Megmutatjuk, hogy ha

$$AA_1 \cdot AB + BB_1 \cdot BC + CC_1 \cdot CA = 6t,$$

akkor a háromszög szabályos. A számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenség szerint

$$\frac{AA_1 \cdot AB + BB_1 \cdot BC + CC_1 \cdot CA}{3} \ge \sqrt[3]{(AA_1 \cdot AB) \cdot (BB_1 \cdot BC) \cdot (CC_1 \cdot CA)}. \tag{2}$$

De

$$(AA_1 \cdot AB) \cdot (BB_1 \cdot BC) \cdot (CC_1 \cdot CA) = (AA_1 \cdot BC) \cdot (BB_1 \cdot CA) \cdot (CC_1 \cdot AB) = (2t)^3,$$

vagyis a (2) egyenlőtlenség

$$AA_1 \cdot AB + BB_1 \cdot BC + CC_1 \cdot CA \ge 6t$$

alakban is írható. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha

$$AA_1 \cdot AB = BB_1 \cdot BC = CC_1 \cdot CA = 2t.$$

Ezt összevetve (1)-gyel, kapjuk, hogy

$$AA_1 \cdot AB = AA_1 \cdot BC, \quad BB_1 \cdot BC = BB_1 \cdot CA \quad \text{és} \quad CC_1 \cdot AB = CC_1 \cdot CA,$$

amikből $AB = BC = CA$ adódik; ez azt jelenti, hogy a háromszög szabályos.

Sándor Ágnes (Pápai Református Kollégium Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján