I. megoldás. A bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldalán álló mennyiséget tíz tag összegeként írva és 10-zel osztva az alábbi állítást kapjuk:

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}{10}=\frac{\sqrt{a}+2\frac{\sqrt{b}}{2}+3\frac{\sqrt{c}}{3}+4\frac{\sqrt{d}}{4}}{10}\le 1.$$

Láthatóan tíz nemnegatív szám számtani közepét kell felülről becsülnünk. A számtani és a négyzetes közép közti egyenlőtlenség szerint

$$\frac{\sqrt{a}+2\frac{\sqrt{b}}{2}+3\frac{\sqrt{c}}{3}+4\frac{\sqrt{d}}{4}}{10}\le\sqrt{\frac{a+2\frac{b}{4}+3\frac{c}{9}+4\frac{d}{16}}{10}}=\sqrt{\frac{a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}+\frac{d}{4}}{10}},$$

így elegendő azt igazolni, hogy $B=a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}+\frac{d}{4}\le 10$.

Ehhez vegyük észre, hogy B előállítható a feltételben szereplő részletösszegek felhasználásával:

$$(*)\qquad a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}+\frac{d}{4}=\frac{1}{4}(a+b+c+d)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)(a+b+c)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)(a+b)+\left(1-\frac{1}{2}\right)a.$$

Ebben a felírásban minden részletösszeg együtthatója pozitív, így az összeg a feltétel alapján felülről becsülhető:

$$B\le\frac{1}{4}\cdot 30+\frac{1}{12}\cdot 14+\frac{1}{6}\cdot 5+\frac{1}{2}=10$$

és éppen ezt akartuk bizonyítani.

Lajkó Miklós (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. évf.)

Megjegyzések. 1. A bizonyításból kiderül, hogy pontosan akkor van egyenlőség, ha $a=1$, $b=4$, $c=9$ és $d=16$.

2. A feladat állítása természetes módon általánosítható: hasonlóan igazolható, hogy ha a nemnegatív $a_1,a_2,\ldots,a_n$ számokra $\sum_{i=1}^{k}a_i\le\sum_{i=1}^{k}i^2$, ha $k=1,2,3,\ldots,n$, akkor $\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i}\le\sum_{i=1}^{n}i=\frac{n(n+1)}{2}$.

3. A bizonyításban kulcsszerepet játszó $(*)$ átalakítást az $1\cdot a+\frac{1}{2}\cdot b+\frac{1}{3}c+\frac{1}{4}d$ összeg *Abel*-féle átrendezésének nevezik. Igen hatásos algebrai módszer, azonosságok és egyenlőtlenségek bizonyításának fontos eszköze.

4. Ha $A=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}$, akkor a fenti bizonyítás a $B=a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}+\frac{d}{4}\le 10$ egyenlőtlenség felhasználásával igazolta, hogy $A\le 10$. Ezt viszont nem a kézenfekvőnek látszó $A\le B$ egyenlőtlenségen keresztül mutatta meg – jó okkal – az ugyanis nem igaz! A bizonyítás első részének a becslése azt adja, hogy A fölülről becsülhető B-nek és a nála nagyobb 10-nek a mértani közepével: $\sqrt{10B}\ge A$. A $10\ge A$ állítás emiatt következik a $10\ge B$ egyenlőtlenségből.

II. megoldás. Megmutatjuk, hogy ha a nemnegatív $a_1,a_2,\ldots,a_k$ számokra

$$a_1+a_2+\cdots+a_k\le 1^2+2^2+\cdots+k^2,$$

akkor

$$\sqrt{a_1}+2\sqrt{a_2}+\cdots+k\sqrt{a_k}\le 1^2+2^2+\cdots+k^2.$$

A $0\le\left(\sqrt{a_1}-1\right)^2+\left(\sqrt{a_2}-2\right)^2+\cdots+\left(\sqrt{a_k}-k\right)^2$ azonosan teljesülő egyenlőtlenségben a négyzetre emeléseket elvégezve és rendezés után 2-vel osztva éppen a bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk.

Ezt felhasználva

$$(1)\qquad \sqrt{a}\le 1;$$

$$(2)\qquad \sqrt{a}+2\sqrt{b}\le 5;$$

$$(3)\qquad \sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c}\le 14;$$

$$(4)\qquad \sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c}+4\sqrt{d}\le 30.$$

Az (1), (2), (3), (4) egyenlőtlenségeknek olyan többszöröseit kellene összegeznünk, hogy az összegben minden tag együtthatója egyenlő legyen. Ha arra törekszünk, hogy ez a közös együttható a szereplő 1, 2, 3, 4 együtthatók legkisebb közös többszöröse, 12 legyen, akkor a $\sqrt{d}$-t tartalmazó egyedüli (4)-et 3-mal kell megszoroznunk. Innen a további szorzók egyértelműen adódnak: $\sqrt{c}$ együtthatójának beállításához (3)-at 1-gyel, $\sqrt{b}$ együtthatójához (2)-t 2-vel, végül $\sqrt{a}$ együtthatójához (1)-et 6-tal kell megszoroznunk. Így

$$6\sqrt{a}+2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)+\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)+3\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)=$$

$$=12\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}\right),$$

tehát $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}\le\dfrac{6\cdot 1+2\cdot 5+1\cdot 14+3\cdot 30}{12}=10.$

Besenyei Balázs (Tatabánya, Bárdos László Gimn., 11. évf.)

III. megoldás. Legyenek x, y, u és v nemnegatív számok, amelyekre $x+y=u+v$.

A $\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)^2=2(p+q)-\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)^2$ azonosságból leolvasható, hogy a $\sqrt{x}+\sqrt{y}$, illetve a $\sqrt{u}+\sqrt{v}$ összegek közül az a nagyobb, amelyikben a tagok eltérése, $\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right|$ illetve $\left|\sqrt{u}-\sqrt{v}\right|$ kisebb.

Legyen ezek után $A=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}$. Ha a négy szám közül egyet növelünk, akkor természetesen ennek a számnak a négyzetgyöke is nő és ekkor persze A is. Másfelől a fentiek szerint A úgy is növelhető, hogy az a, b, c, d számok közül kettőt változtatunk, úgy, hogy összegük ne változzék, eltérésük pedig csökkenjen.

Nevezzük azokat a rendezett számnégyeseket, amelyekről a feladat állítása szól, megengedett számnégyeseknek. A bizonyításhoz e két lépés ismételt alkalmazásával egy tetszőleges megengedett a, b, c, d számnégyest az $a=1$, $b=4$, $c=9$, $d=16$ számnégyessé alakítunk úgy, hogy eközben minden lépés során megengedett számnégyest hozunk létre. Mivel egy lépés során A értéke nő és az eljárás végén ez az érték éppen 10, ez valóban elég a bizonyításhoz.

Nézzük tehát a lépéseket. Ha $a+b+c+d<30$, akkor növeljük d értékét úgy, hogy az összeg éppen 30 legyen. Az így kapott számnégyes nyilván megengedett és teljesül rá, hogy $0\le 14-(a+b+c)=d-16$. Ha most $a+b+c<14$, akkor $d>16>c$.

Növeljük c értékét $(d-16)$-tal a d értékét pedig csökkentsük ugyanennyivel. Ekkor $a+b+c$ értéke 14, d értéke pedig 16. Ezzel c és d eltérése csökken, az összegük nem változik, A értéke tehát nő. Az így kapott megengedett számnégyesben $a+b+c=14$.

A fenti eljárás folytatható. Mivel $0\le 5-(a+b)=c-9$, azért ha $a+b<5$, akkor b-t növelve, c-t pedig ugyanennyivel csökkentve elérjük, hogy $c=9$ és $a+b=5$ teljesüljön. Így $0\le 1-a=b-4$, ezért ha $a<1$, akkor a értékét növelve, b értékét pedig ugyanennyivel csökkentve végül ahhoz a számnégyeshez jutunk, amelyre $a+b+c+d=30$, $a+b+c=14$, $a+b=5$ és $a=1$. Eljutottunk az $a=1$, $b=4$, $c=9$, $d=16$ számnégyeshez és ezzel bebizonyítottuk az állítást.

Paulin Roland (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn. 8. évf.)