Legyen $f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, ahol $a_n, \ldots, a_0$ egészek. Ha β tetszőleges szám, akkor f-et mindig átírhatjuk $y = x - \beta$ hatványai szerint:

$$f(x) = f(y+\beta) = a_n(y+\beta)^n + a_{n-1}(y+\beta)^{n-1} + \ldots + a_1(y+\beta) + a_0 =$$

$$= c_n y^n + c_{n-1}y^{n-1} + \ldots + c_1 y + c_0 = g(y).$$

Itt nyilván $c_n = a_n$ és $f(\beta) = g(0) = c_0$. A c_i együtthatók már nem feltétlenül egészek; ha azonban β egész szám, akkor mindegyik c_i is egész, hiszen ezek az eredeti a_j együtthatókból és β-ból kaphatók meg néhány összeadás és szorzás (az $a_j(y+\beta)^j$ hatványozások elvégzése és rendezés) eredményeként. Ugyanígy látható az is, hogy ha $\beta = \dfrac{A}{B}$ racionális szám (A és B egészek), akkor legalábbis $B^n c_i$ értéke egész, minden i-re.

Alkalmazzuk észrevételeinket először arra az esetre, amikor $\beta = k$ egész szám. Az elmondottak szerint ekkor

$$f = b_n(x-k)^n + b_{n-1}(x-k)^{n-1} + \ldots + b_1(x-k) + b_0,$$

ahol a b_i együtthatók egészek, és $b_0 = f(k)$. Ha p és q egymáshoz relatív prím egészek és $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = 0$, akkor

$$0 = f\left(\frac{p}{q}\right) = b_n\left(\frac{p}{q}-k\right)^n + b_{n-1}\left(\frac{p}{q}-k\right)^{n-1} + \ldots + b_1\left(\frac{p}{q}-k\right) + b_0,$$

$$0 = q^n\left(b_n\left(\frac{p}{q}-k\right)^n + b_{n-1}\left(\frac{p}{q}-k\right)^{n-1} + \ldots + b_1\left(\frac{p}{q}-k\right) + b_0\right) =$$

$$= b_n(p-kq)^n + qb_{n-1}(p-kq)^{n-1} + \ldots + q^{n-1}b_1(p-kq) + q^n b_0.$$

Az utóbbi egyenlőség jobb oldalán egy kivételével mindegyik tagból kiemelhető $p-kq$; mivel az összeg értéke nulla, azért az utolsó tag is osztható $(p-kq)$-val:

$$p - kq \mid q^n b_0.$$

Feltevésünk szerint p és q relatív prímek, így $p-kq$ is relatív prím q-hoz, tehát q^n-hez is; ezért a kapott oszthatóság csak úgy teljesülhet, ha valóban $p - kq \mid b_0 = f(k)$.

Megmutatjuk, hogy az állítás megfordítása is igaz; ehhez tegyük fel, hogy p és $q \neq 0$ olyan egészek, hogy a $p - kq \mid f(k)$ oszthatóság minden k egészre teljesül. Írjuk át az f polinomot ezúttal $x - \dfrac{p}{q}$ hatványai szerint:

$$f = c_n\left(x-\frac{p}{q}\right)^n + c_{n-1}\left(x-\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + c_1\left(x-\frac{p}{q}\right) + c_0,$$

ahol tehát $c_0 = f\left(\dfrac{p}{q}\right)$, és a c_i együtthatók q^n-szeresei egész számok. Ezt felhasználandó szorozzuk az egyenlőség mindkét oldalát q^{2n}-nel:

$$q^{2n}f = (q^n c_n)(qx-p)^n + q(q^n c_{n-1})(qx-p)^{n-1} + \ldots + q^{n-1}(q^n c_1)(qx-p) + q^n(q^n c_0),$$

így minden k egész számra

$$q^{2n}f(k) = (q^n c_n)(qk-p)^n + q(q^n c_{n-1})(qk-p)^{n-1} + \ldots +$$

$$+ q^{n-1}(q^n c_1)(qk-p) + q^n(q^n c_0).$$

Feltettük, hogy a bal oldalon álló $f(k)$ osztható $(p-kq)$-val, a jobb oldalon pedig az utolsó kivételével mindegyik tagból kiemelhető $qk - p = -(p-kq)$; ezért az utolsó tag, $q^n(q^n c_0)$ is osztható $(p-kq)$-val. Ez minden k egészre fönnáll, tehát ($q \neq 0$ szerint) a $q^n(q^n c_0)$ számnak végtelen sok osztója van. Ez csak úgy lehet, ha $q^n(q^n c_0) = 0$, vagyis $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = c_0 = 0$.

Megjegyzések: 1. A bizonyítás első részében lényegében azt használtuk fel, hogy ha $\dfrac{p}{q}$ gyöke az $f(x)$ polinomnak, akkor $\dfrac{p-kq}{q}$ gyöke a $g(x) = f(x+k)$ polinomnak. Az állítás első része így egyszerű következménye annak az ismert eredménynek, hogy egy egész együtthatós polinom racionális gyökének egyszerűsített alakjában a számláló osztója a polinom konstans tagjának, ami a polinom 0 helyen vett helyettesítési értéke. Az állítás egyébként a $k = 0$ speciális esetben éppen ezt adja.

2. Az idézett eredménnyel együtt szokás kimondani, hogy a racionális gyök nevezője, q, osztója a főegyütthatónak. E két feltétel együttesen is csak szükséges ahhoz, hogy az egyszerűsített alakban felírt $\dfrac{p}{q}$ gyöke legyen az $f(x)$ polinomnak, egy szükséges és elégséges feltételt épp a feladat mond ki.