I. megoldás. Írjuk fel U_k^2-et annak alapján, ahogyan az írásbeli szorzást elvégezzük. Ennek során k^2 darab 1-est írunk le, k sor mindegyikében k darabot, soronként egy helyiértékkel eltolva. $S(U_k^2)$ kiszámításakor oszloponként összeadjuk a felírt 1-eseket, majd az átvitelek figyelembevételével kapott számjegyeket összegezzük.

$S(U_k)^2 = k^2$ kiszámításakor soronként adjuk össze az 1-eseket, majd az így kapott k darab összeg – mindegyikük értéke k – összegét vesszük.

A különbséget az esetleges átvitelek okozzák, az első esetben ilyenkor az adott oszlopban lévő egyesek összege helyett ennek az összegnek csak az egyes helyiértéken lévő részét írjuk le, az összeg további részének $\frac{1}{10}$-ét a következő helyiértéken álló számhoz adjuk.

Ilyen veszteség minden egyes átvitel során föllép, átvitelre pedig akkor kerül sor, ha van olyan oszlop, ahol legalább tíz darab 1-es áll, vagyis a k értéke legalább 10. Ekkor tehát $S(U_k^2) < S(U_k)^2$. Ha viszont $k \le 9$, akkor éppen a fenti gondolatmenet mutatja, hogy ugyanazt a k^2 mennyiséget számoljuk ki oszloponként, illetve soronként, tehát ekkor $S(U_k^2) = S(U_k)^2$.

Kovács Péter (Debrecen, DE Kossuth Lajos Gyakorló Gimn., 8. évf.)

II. megoldás. A k darab 1-essel felírt szám jegyeinek az összege, $S(U_k) = k$, azért a feltétel az $S(U_k^2) = k^2$ alakot ölti. Vizsgáljuk meg, hogy hány jegye van U_k^2-nek. Mivel $10^{k-1} < U_k < 2 \cdot 10^{k-1}$, azért $10^{2k-2} < U_k^2 < 4 \cdot 10^{2k-2} < 10^{2k-1}$ és így U_k^2 jegyeinek száma $2k-1$. Innen felső becslést kaphatunk $S(U_k^2)$ értékére: mivel egy számjegy legfeljebb 9, így $S(U_k^2) \le 9(2k-1)$. Ez azt jelenti, hogy a megfelelő k értékekre

$$k^2 = S(U_k)^2 = S(U_k^2) \le 9(2k-1) < 18k,$$

azaz $k < 18$.

Így öszesen 17 esetet kell megvizsgálnunk, ezeket egyenként végignézve kapjuk, hogy ha $1 \le k \le 9$, akkor teljesül a feltétel, ha pedig $10 \le k \le 17$, akkor $S(U_k^2) < S(U_k)^2$. A megfelelő értékeket az alábbi táblázat tartalmazza:

k	$S(U_k)^2 = k^2$	$S(U_k^2)$
1	1	1
2	4	4
3	9	9
4	16	16
5	25	25
6	36	36
7	49	49
8	64	64
9	81	81
10	100	82
11	121	85
12	144	90
13	169	97
14	196	106
15	225	117
16	256	130
17	289	145

Zavarkó Gábor (Miskolc, Földes Ferenc Gimn., 12. évf.)

Megjegyzés. Némi ügyeskedéssel tovább korlátozható a „kézzel” ellenőrzött k értékek száma. *Backhausz Ágnes,* a budapesti Fazekas Mihály Gimnázium 11. osztályos tanulója a következőképpen okoskodott:

Az $U_{n+k} = U_k + 10^k U_n$ azonosságból következik, hogy

$$U_{n+k}^2 = U_k^2 + 2 \cdot 10^k U_k U_n + 10^{2k} U_n^2.$$

Ez azt jelenti, hogy U_{n+k}^2 és U_k^2 utolsó k számjegye egyenlő. Kiszámolva U_{12}^2 értékét az utolsó 12 számjegy 320 987 654 321, ezek összege pedig 50. Ez azt jelenti, hogy ha $k \ge 12$, akkor $U_k^2 = \dots 320\,987\,654\,321$ alakú, ebben az esetben pedig a $(2k-1)$-jegyű U_k^2 jegyeinek az összege legfeljebb $50 + (2k-1-12) \cdot 9 = 18k - 67$. Innen az $S(U_k)^2 = S(U_k^2)$ fennállásához szükséges $k^2 \le 18k - 67$ feltételt kapjuk, ahonnan $k < 13$ adódik. Ez pedig azt jelenti, hogy a feladat feltétele nem teljesülhet, ha $k \ge 13$.

III. megoldás. Ha a és b nemnegatív egészek, akkor az összeadás algoritmusa következményeként kapjuk, hogy

$$S(a+b) \le S(a) + S(b). \tag{1}$$

Mivel $U_k = 10U_{k-1} + 1$, ezért $U_k^2 = 100U_{k-1}^2 + 20U_{k-1} + 1$. Innen (1) felhasználásával

$$S(U_k^2) \le S(100U_{k-1}^2) + S(20U_{k-1}) + 1 = S(U_{k-1}^2) + S(2U_{k-1}) + 1 =$$

$$= S(U_{k-1}^2) + 2(k-1) + 1,$$

azaz

(2) $$S(U_k^2) \le S(U_{k-1}^2) + 2k - 1.$$

Innen egyrészt a k-ra vonatkozó teljes indukcióval nyomban adódik, hogy

(3) $$S(U_k^2) \le k^2.$$

Másrészt ha egy adott k-ra $S(U_k^2) = k^2$, akkor (2) szerint

$$k^2 = S(U_k^2) \le S(U_{k-1}^2) + 2k - 1,$$

azaz $S(U_{k-1}^2) \ge k^2 - 2k + 1 = (k-1)^2$, amit (3)-mal egybevetve

$$S(U_{k-1}^2) = (k-1)^2.$$

Ez azt jelenti, hogy ha van olyan k_0, amelyre (3)-ban egyenlőség teljesül, akkor ugyanez minden $k < k_0$ esetén is igaz.

Hasonlóan kapjuk (2) fölhasználásával, hogy ha van olyan k_0, amelyre (3)-ban határozott egyenlőtlenség áll, akkor ugyanez minden $k > k_0$ esetén is teljesül.

Ha kiszámoljuk, akkor $S(U_9^2) = 9^2$ és $S(U_{10}^2) = 82 < 10^2$. A fentiek szerint ez azt jelenti, hogy

$$S(U_k^2) = S(U_k)^2, \quad \text{ha} \quad 1 \le k \le 9 \quad \text{és} \quad S(U_k^2) < S(U_k)^2, \quad \text{ha} \quad 10 \le k.$$

Antal Ágnes (Budapest, Apáczai Csere János Gimn., 12. évf.)