I. megoldás. A vizsgált egyenlőtlenségben minden tag pozitív, ezért a nevezőkkel szorozva majd négyzetre emelve ugyanaz lesz az egyenlőtlenség két oldalán így adódó és az eredeti mennyiségek nagyságviszonya. Elegendő tehát az

$$(1+g)\big(2+x+y+2\sqrt{(1+x)(1+y)}\big) \quad \text{és a} \quad 4(1+x)(1+y)$$

kifejezéseket összehasonlítanunk.

A tömörség kedvéért legyen

$$a=\frac{x+y}{2} \quad \text{és} \quad t=\sqrt{(1+x)(1+y)}=\sqrt{1+2a+g^2}.$$

A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség szerint $a \ge g$ és ezért

$$(*) \qquad t \ge \sqrt{1+2g+g^2}=1+g$$

(g a feltétel szerint pozitív).

Ezzel a jelöléssel $(1+g)(2+2a+2t)$ és $4t^2$ nagyságviszonyát kell megállapítanunk.

Vizsgáljuk először a $g \ge 3$ esetet. Azt kell megmutatnunk, hogy ekkor

$$(1+g)(2+2a+2t) \ge 4t^2,$$

vagy 2-vel osztva

$$(1) \qquad (1+g)(1+a)+(1+g)t \ge 2t^2.$$

A bal oldalon $(*)$ szerint $(1+g)t \ge (1+g)^2$, így elegendő annyit igazolnunk, hogy ha $g \ge 3$, akkor

$$(1+g)(1+a)+(1+g)^2 \ge 2t^2=2+4a+2g^2.$$

Beszorzás és rendezés után a $-g^2+ag-3a+3g \ge 0$ egyenlőtlenséget kapjuk. Vegyük észre, hogy a bal oldal szorzattá alakítható:

$$-g^2+ag-3a+3g=(g-3)(a-g).$$

Ennek a szorzatnak pedig egyik tényezője sem negatív: az első a g-re vonatkozó feltétel miatt, a második pedig a korábban is felhasznált $a \ge g$ egyenlőtlenség szerint. Ezzel az állítás első részét igazoltuk. Az is látszik, hogy pontosan akkor van egyenlőség, ha $a=g$, azaz $x=y$.

Legyen most $g \le 2$. Ekkor a fordított irányú

$$(2) \qquad (1+g)(1+a)+(1+g)t \le 2t^2$$

egyenlőtlenséget kell megmutatnunk. A megoldás első részében a nem negatív $(a-g)$ tényezővel „bővítve" használtuk fel a $g-3 \ge 0$ feltételt; hasonló módon most a $(2-g)(a-g) \ge 0$ egyenlőtlenséget kapjuk. Beszorzás és rendezés után innen $t^2 \ge 1+2g+ag$ adódik. Ha ennek felhasználásával „óvatosan" becsüljük alulról (2) jobb oldalát, akkor azt kapjuk, hogy $t^2+(1+2g+ag) \le 2t^2$, és így (2) helyett elegendő a megmutatnunk, hogy

$$(2') \qquad (1+g)(1+a)+(1+g)t \le t^2+1+2g+ag.$$

Megjegyzés. Az „óvatosság" indokolt, a bizonyítandó egyenlőtlenség igen éles. Könnyen ellenőrizhető, hogy ha (2) jobb oldalát a kézenfekvőnek tűnő $2(1+2g+ag) \le 2t^2$ módon csökkentjük, akkor az így kapott alsó becslés már túl erős: így már (2) bal oldalánál kisebb értéket kapunk.

Rendezés után az

$$(3) \qquad (1+g)t \le t^2-a+g=1+a+g+g^2$$

egyenlőtlenséget kapjuk. A bal oldalt a mértani és a számtani közép közti egyenlőtlenség felhasználásával becsülve pedig éppen a bizonyítani kívánt (3) egyenlőtlenséget kapjuk:

$$(1+g)t \le \frac{(1+g)^2+t^2}{2}=\frac{1+2g+g^2+1+2a+g^2}{2}=1+a+g+g^2$$

A felhasznált egyenlőtlenségeket vizsgálva látható, hogy ebben az esetben is pontosan akkor teljesül az egyenlőség, ha $x=y$.

Sándor Nóra Katalin (Pápai Református Kollégium Gimnáziuma, 11. évf.) és
Antal Ágnes (Budapest, Apáczai Csere János Gimn., 12. évf.) dolgozata alapján.

II. megoldás. Az első megoldáshoz hasonlóan szorozzunk a nevezőkkel és emeljünk négyzetre, végül tekintsük a két oldal P különbségét:

$$P = 4(1+x+y+xy) - (1+g)\big(2+x+y+2\sqrt{(1+x)(1+y)}\,\big).$$

Azt kell igazolnunk, hogy ha $g \geq 3$, akkor $P \leq 0$, ha pedig $g \leq 2$, akkor $P \geq 0$.

Használjuk most is az előző megoldás jelöléseit, legyen $t = \sqrt{(1+x)(1+y)}$ és $a = \dfrac{x+y}{2}$. Ekkor $P = 4t^2 - (1+g)(2t+2a+2)$. Fejezzük ki a-t a t és a g változók segítségével:

$$2+2a = 2+x+y = (x+1)(y+1)+1-xy = t^2+1-g^2.$$

Így P a t változó másodfokú polinomjaként írható:

$$P = 4t^2 - (1+g)(t^2+1-g^2+2t) = (3-g)t^2 - 2(g+1)t + (g+1)(g^2-1).$$

Vegyük észre, hogy ez a polinom szorzattá alakítható:

$$P = (t-g-1)\big[(3-g)t+1-g^2\big].$$

Az első megoldásból $(*)$ szerint $t \geq g+1$ és pontosan akkor van egyenlőség, ha $x = y$. Ez azt jelenti, hogy ha $x \neq y$, akkor a fenti szorzat első tényezője pozitív, P előjele megegyezik a második tényező, $Q = (3-g)t+1-g^2$ előjelével.

Ha $g \geq 3$, akkor Q-ban az elsőfokú tag együtthatója, $(3-g)$, nem pozitív, a t-ben nulladfokú tag, $1-g^2$ pedig határozottan negatív, ekkor tehát Q negatív, és ezt kellett bizonyítanunk.

Ha $g \leq 2$, akkor $(3-g)$ pozitív. Ismét felhasználva a $t \geq g+1$ egyenlőtlenséget:

$$Q = (3-g)t+1-g^2 \geq (3-g)(g+1)+1-g^2.$$

A beszorzást elvégezve $(3-g)(g+1)+1-g^2 = -2g^2+2g+4 = 2(2-g)(g+1)$, ami valóban nem negatív, ha $g \leq 2$.

A bizonyításból látszik, hogy mindkét esetben akkor van egyenlőség, ha $x = y$.

Megjegyzés. Egyik megoldásból sem derül ki igazán, min múlik a feladat állítása. A függvényvizsgálat hagyományos eszközét, a differenciálszámítást használó alábbi megközelítés nem vetekszik ugyan a fenti megoldások tömörségével, viszont jobban mutatja a probléma szerkezetét.

III. megoldás. Az $xy = g^2$ feltétel azt jelenti, hogy $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+y}}$ értéke az egyik változó függvényeként is felírható: ha pozitív x-ekre bevezetjük az

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{g^2}{x}}}$$

függvényt, akkor $\dfrac{2}{\sqrt{1+g}} = f(g)$; ezzel a jelöléssel $f(x)$ és $f(g)$ értékét kell összehasonlítanunk.

Jegyezzük meg, hogy az f függvény „szimmetrikus” g-re abban az értelemben, hogy ha $xy = g^2$, akkor $f(x) = f(y)$.

Ha $x > 0$, akkor az f függvény differenciálható, és:

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\left(1+\frac{g^2}{x}\right)^{-\frac{3}{2}}\frac{g^2}{x^2}.$$

Most és a továbbiakban nem részletezünk minden lépést, az olvasó maga ellenőrizheti az egyes átalakításokat. A derivált rendezés után

$$f'(x) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{x(x+g^2)^3(1+x)^3}}\left(g^2\cdot\sqrt{(1+x)^3} - \sqrt{x(x+g^2)^3}\right).$$

f szélsőértékeinek vizsgálatához a derivált előjelét kell tisztáznunk. Az első tényező pozitív, így $f'(x)$ előjele azonos a második tényező előjelével. Ez a tényező két négyzetgyök különbsége. Két nemnegatív mennyiség különbségének előjele egyenlő a négyzeteik különbségének előjelével, ami azt jelenti, hogy $f'(x)$ előjele

$$S(x) = g^4(1+x)^3 - x(x+g^2)^3$$

előjelével egyenlő.

A már említett szimmetria is indokolja, hogy érdemes $S(g)$ értékét kiszámolni: nyomban adódik, hogy $S(g) = 0$. Ekkor pedig, mivel $S(x)$ a g-nek csak páros kitevőjű hatványait tartalmazza, $S(-g)$ értéke is 0. Ebből következik, hogy $S(x)$-ből kiemelhető $x^2 - g^2$. Valóban:

$$S(x) = g^4(1+x)^3 - x(x+g^2)^3 = (x^2-g^2)\big(-x^2+g^2(g^2-3)x-g^2\big).$$

Az első tényező előjele könnyen adódik; a második tényező, a másodfokú

$$h(x) = -x^2 + g^2(g^2 - 3)x - g^2$$

előjelének vizsgálatához írjuk fel ennek a polinomnak a diszkriminánsát:

$$D(g) = g^4(g^2 - 3)^2 - 4g^2.$$

Ha g^2-et kiemelünk, akkor a megmaradó kifejezés két négyzet különbségeként szorzattá alakítható. Az így kapott két harmadfokú polinom azonnal tovább bomlik, a diszkrimináns végül elsőfokú tényezők szorzataként írható:

$$D(g) = g^2\left[\left(g(g^2-3)\right)^2 - 4\right] = g^2(g^3 - 3g - 2)(g^3 - 3g + 2) =$$

$$= g^2(g-2)(g-1)^2(g+1)^2(g+2).$$

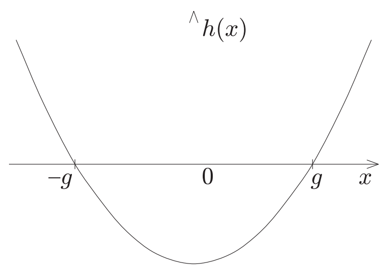
Innen nyomban leolvasható a diszkrimináns előjele a g pozitív értékeire:

Ha $g > 2$, akkor $D > 0$ és így $h(x)$-nek két gyöke van: x_1 és x_2. A gyökök szorzata g^2, összegük $g^2(g^2 - 3) > 0$, így $0 < x_1 < g < x_2$.

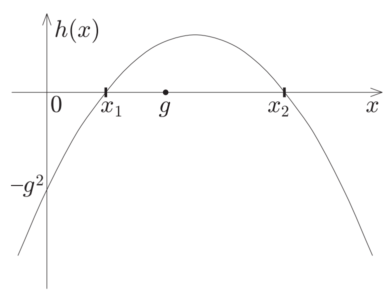
Ha $g = 2$ vagy $g = 1$, akkor $D = 0$, $h(x)$-nek egy gyöke van. Ebben az esetben $h(x) \le 0$ minden pozitív x-re. Ha $g = 2$, akkor $h(x) = -x^2 + 4x - 4 = -(x-2)^2$, a gyök tehát éppen 2; ha pedig $g = 1$, akkor $h(x) = -x^2 - 2x - 1 = -(x+1)^2$, a gyök -1.

Ha $0 < g < 1$, vagy $1 < g < 2$, akkor $D < 0$, $h(x)$-nek nincs gyöke, így $h(x) < 0$ minden pozitív x-re.

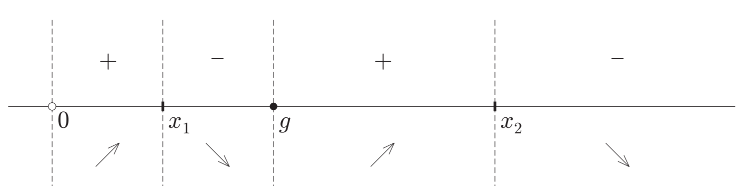
Vegyük észre, hogy mindez azt jelenti, hogy ha $D \le 0$ és $S(x)$ első tényezője, $x^2 - g^2 \ne 0$ – azaz $x \ne g$ – akkor $h(x) < 0$, a derivált előjele tehát éppen ellentétes az első tényező, $x^2 - g^2$ előjelével.



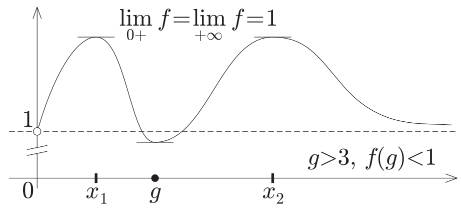
1.a. ábra



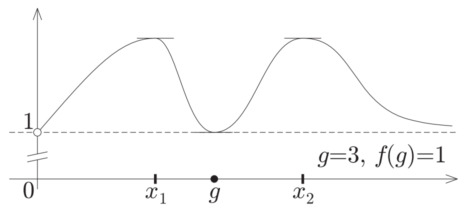
1.b. ábra



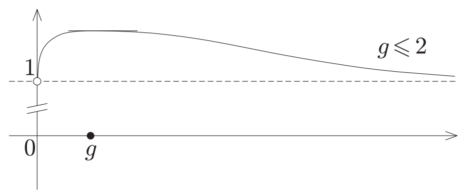
2. ábra



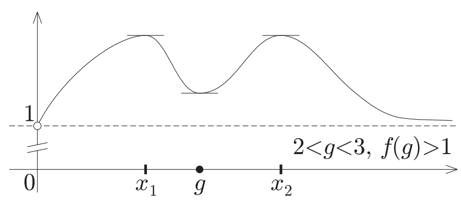
3. ábra



4. ábra



5. ábra



6. ábra

A meglehetősen hosszúra nyúlt előkészítés után térjünk rá a feladat megoldására. Legyen először $g \geq 3$. Ekkor az *1.a., b. ábrákon* látható $S(x)$ két másodfokú tényezőjének a grafikonja, innen pedig $S(x)$ – és $f'(x)$ – előjelét a *2. ábra* mutatja. Az előjelviszonyokat figyelembe véve kapjuk, hogy f-nek lokális maximuma van x_1-ben és x_2-ben – ezek értéke egyébként, mint láttuk, egyenlő – és lokális minimuma g-ben.

Ebből azonban még csak annyi következik, hogy $f(x) \geq f(g)$ ha $x_1 \leq x \leq x_2$, meg kell vizsgálnunk a függvényt a $(0; x_1)$ és az $(x_2; \infty)$ intervallumokon is. Előbbin $f'(x)$ pozitív, így $f(x)$ itt szigorúan monoton növő, az utóbbin pedig $f'(x)$ negatív, azért $f(x)$ itt szigorúan monoton fogyó. Mivel pedig $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, ezért $f(x) > 1$, ha $x \in (0; x_1) \cup (x_2; \infty)$. Végül pedig ha $g \geq 3$, akkor

$$f(g) = \frac{2}{\sqrt{1+g}} \leq 1,$$

tehát a $g \geq 3$ esetben az f függvénynek abszolút minimuma van a g helyen, $f(x) \geq f(g)$ valóban, ha $x > 0$ (*3., 4. ábrák*). Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $x = g$, azaz a feladat eredeti változói szerint $x = y$.

Legyen most $g \leq 2$. Láttuk, hogy ha $x^2 - g^2 \neq 0$, akkor $h(x) < 0$, azért a derivált előjele $S(x)$ első tényezője, $x^2 - g^2$ előjelének az ellentettje. Így f szigorúan monoton növő, ha $0 < x < g$ és szigorúan monoton fogyó, ha $g < x$, f-nek abszolút maximuma van a g-ben: $f(x) \leq f(g)$, ha $x > 0$ (*5. ábra*).

Tábor Áron (Budapest, Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. évf.) dolgozata nyomán

Megjegyzés. Ha $2 < g < 3$, akkor a megoldás első részében látott vizsgálat eredményeképpen a *3. ábra* grafikonjához hasonló görbét kapunk, most azonban $f(g) > 1$. Ilyenkor egyik irányú egyenlőtlenség sem teljesül minden pozitív x-re (*6. ábra*): van olyan x, amelyre $f(x) > f(g)$ (ilyen például x_1, az egyik lokális maximum) és ha x elég kicsi vagy elég nagy, akkor $f(x) < f(g)$, ugyanis a függvény lokális minimuma, $f(g) > 1 = \lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.