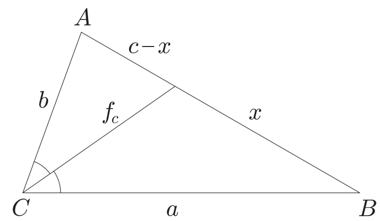
Az ABC háromszög C-ből induló szögfelezője f_c. Fejezzük ki f_c-t a háromszög oldalainak segítségével.



Az f_c szögfelező a C oldalt x és $c-x$ hosszúságú részekre osztja az *ábra* szerint, a C csúcsnál lévő szög γ. Mint ismeretes,

$$x=\frac{ac}{a+b}, \quad c-x=\frac{bc}{a+b}.$$

Írjuk fel a részháromszögekre a koszinusz tételt:

$$x^2=a^2+f_c^2-2af_c\cos\frac{\gamma}{2}, \quad (c-x)^2=b^2+f_c^2-2bf_c\cos\frac{\gamma}{2}.$$

A két egyenletből fejezzük ki $\cos\frac{\gamma}{2}$-t. A két kifejezés egyenlőségéből egyszerűsítés után kapjuk, hogy

$$b(a^2+f_c^2-x^2)=a\big(b^2+f_c^2-(c-x)^2\big).$$

Helyettesítsük be az x és $c-x$ előbb kapott értékeit:

$$b\left(a^2+f_c^2-\left(\frac{ac}{a+b}\right)^2\right)=a\left(b^2+f_c^2-\left(\frac{bc}{a+b}\right)^2\right).$$

Innen f_c kifejezhető. A műveletek elvégzése és egyszerűsítés után, valamint felhasználva az $s=\dfrac{a+b+c}{2}$ jelölést, kapjuk, hogy

$$f_c=\sqrt{\frac{4ab\cdot s(s-c)}{(a+b)^2}}.$$

A betűk ciklikus cseréjével hasonló összefüggést írhatunk fel az f_a és f_b szögfelezőkre is.

Írjuk fel az $f_af_bf_c$ szorzatot:

$$f_af_bf_c=\sqrt{\frac{4ac\cdot s(s-b)\cdot 4ab\cdot s(s-c)\cdot 4bc\cdot s(s-a)}{(c+a)^2\cdot(b+c)^2\cdot(a+b)^2}}.$$

A számlálóból kiemelhetjük a $8s\cdot abc$-t, a nevező tényezőiből pedig gyököt vonunk, így kapjuk, hogy

$$f_af_bf_c=\frac{2s\cdot abc\cdot 4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{(a+b)(b+c)(a+c)}.$$

Itt $2s=a+b+c$, Héron képlete szerint pedig $4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=4T$, ezeket helyettesítve valóban az (1) összefüggést kapjuk.

Metzing András (Pécs, Leöwey Klára Gimn., 11. évf.)