Az f polinom nem konstans, hiszen ekkor

$$f(x^2+1)-f(x^2-1)=c-c=0.$$

Ha $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$, akkor

$$f(x^2+1)=a_n(x^2+1)^n+a_{n-1}(x^2+1)^{n-1}+\dots+a_1(x^2+1)+a_0$$

és

$$f(x^2-1)=a_n(x^2-1)^n+a_{n-1}(x^2-1)^{n-1}+\dots+a_1(x^2-1)+a_0.$$

Tekintsük a két polinom különbségének általános tagját:

$$d_k(x)=a_k\big[(x^2+1)^k-(x^2-1)^k\big].$$

Felhasználva az $u^k-v^k=(u-v)(u^{k-1}+u^{k-2}v+\dots+v^{k-1})$ azonosságot, kapjuk, hogy $d_k(x)=2a_k\big[(x^2+1)^{k-1}+(x^2+1)^{k-2}(x^2-1)+\dots+(x^2-1)^k\big]$. A zárójelben $(2k-2)$-edfokú polinomok összege áll, mindegyikük főegyütthatója 1, így $d_k(x)$ vagy zéruspolinom – ha $a_k=0$ – vagy pedig pontosan $(2k-2)$-edfokú.

Az $f(x^2+1)-f(x^2-1)$ különbség zérustól különböző tagjai fokszámai között tehát nincsenek egyenlők, a fokszáma így a legmagasabb fokú tag fokszáma, $2n-2$.

A feltétel szerint másodfokú $f(x^2+1)-f(x^2-1)$ polinom tehát pontosan $(2n-2)$-edfokú és így $n=2$. Ekkor $f(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$, az $f(x^2+1)-f(x^2-1)$ különbség pedig

$$a_2(x^2+1)^2+a_1(x^2+1)+a_0-a_2(x^2+1)-a_1(x^2+1)-a_0=4a_2x^2+2a_1.$$

A feltétel szerint ez a különbség $4x^2+6$. Két polinom pontosan akkor egyenlő, ha az azonos fokszámú tagok együtthatói egyenlők, ahonnan $a_2=1$ és $a_1=3$. Az $f(x)$ polinom tehát x^2+3x+a_0 alakú, ahol a_0 tetszőleges valós szám lehet. Így

$$f(x^2+1)-f(x^2)=(x^2+1)^2+3(x^2+1)+a_0-\big[(x^2)^2+3x^2+a_0\big]=2x^2+4.$$

Kőrizs András (Budapest, Veres Péter Gimn., 12. évf.)