I. megoldás. Legyen a sor bal szélén álló fiú F_1 és tekintsük azt a lányt, L_1-et, akit F_1 választott. Ha az ő választottja, F_2 azonos F_1-gyel, akkor F_1 és L_1 egymást választották, készen vagyunk. Ha nem, akkor F_2 jobbra áll a sorban F_1-től. Legyen most F_2 választottja L_2. Mivel F_1 és F_2 útvonalai nem keresztezték egymást, ezért L_2 nem állhat L_1-től balra. Ha L_1 és L_2 azonosak, akkor az (F_2, L_1) pár megfelelő, így föltehető, hogy L_2 az L_1-től jobbra áll.

Az előző gondolatmenetet megismételve kapjuk, hogy ha L_2 és F_2 nem egymást választották, akkor L_2 választottja,

F_3 az F_2-től jobbra áll. Ezt folytatva látható, hogy ha nincs olyan fiú és lány, akik egymást választották, akkor fiúk – és lányok – olyan $F_1, F_2, F_3, \ldots L_1, L_2, \ldots$ sorozatát kapjuk, ahol minden fiú – és lány – az előzőtől jobbra áll az eredeti sorban. Mivel az ilyen sorozatok hossza szükségképpen véges, a fenti eljárás előbb-utóbb elakad, ez pedig, mint láttuk, éppen azt jelenti, hogy a megfelelő fiú és lány egymást választották.

Peres Sámuel (Dunaszerdahely, Vámbéry Ármin Gimn., 10. évf.

Megjegyzés. A bizonyításban nem használtuk ki, hogy a fiúk és a lányok száma egyenlő, csak azt, hogy mindkét halmaz véges. Igazából annyi is elegendő, ha csak az egyik halmaz véges, bár ebben az esetben gyakorlati nehézségekbe ütközne a választás lebonyolítása.

II. megoldás. Jelöljük a fiúkat és a lányokat a sorban elfoglalt helyük sorszámával. Ekkor a fiúk és a lányok választását egy-egy függvénnyel adhatjuk meg: ha az i-edik fiú a j-edik lányt választotta, akkor $\mathrm{f}(i) = j$ és hasonlóan értelmezhetjük a lányok g választásfüggvényét.

Ekkor $\mathrm{f}, \mathrm{g}\colon [1..100] \to [1..100]$, a nem metsző útvonalakról szóló különös feltétel pedig természetes jelentést kap ebben az értelmezésben: mindkét függvény monoton növő. A bizonyítandó állítás így azt jelenti, hogy van olyan $1 \le k \le 100$, amelyre $\mathrm{f}\big(\mathrm{g}(k)\big) = k$.

Jelöljük az fog összetett függvényt h-val. Monoton növő függvények kompozíciójaként a h is monoton növő, továbbá $1 \le \mathrm{h}(1) \le \mathrm{h}(100) \le 100$. Legyen m az a legkisebb 1 és 100 közé eső egész, amelyre $i \ge \mathrm{h}(i)$. Mivel $100 \ge \mathrm{h}(100)$ így a fenti m létezik. Ha $m = 1$, akkor $\mathrm{h}(1) = 1$, ha pedig $m > 1$, akkor m értelmezése és a h monoton növekedése miatt

$$1 \le m - 1 < \mathrm{h}(m-1) \le \mathrm{h}(m) \le m \le 100,$$

vagyis $\mathrm{h}(m) = m$.

Tóth János (Békéscsaba, Rózsa Ferenc Gimn., 12. évf.