A feladatot 2001 helyett tetszőleges n kitevőre oldjuk meg.

Tekintettel arra, hogy az adott és a keresett kifejezés hasonló alakú, vizsgáljuk meg, hogy $\{a\}+\left\{\frac{1}{a}\right\}$ milyen a-ra lehet egész szám. A $0\le\{a\}<1$ és $0\le\left\{\frac{1}{a}\right\}<1$ miatt az összeg ilyenkor vagy 1, vagy pedig 0. Ez utóbbi csak akkor lehetséges, ha a és $\frac{1}{a}$ is egész, azaz $a=\pm1$. Így $1=\{x\}+\left\{\frac{1}{x}\right\}=x-[x]+\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]$ miatt $x+\frac{1}{x}$ egész szám, de sem x, sem $\frac{1}{x}$ nem az.

Az n szerinti teljes indukcióval megmutatjuk, hogy ekkor tetszőleges n-re $x^n+\frac{1}{x^n}$ is egész szám; $n=1$-re a kiinduló feltételt nyerjük, ami nyilvánvalóan igaz. Tételezzük fel, hogy valamilyen k-ig minden természetes számra igaz az állítás. Ekkor $\left(x+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right)=x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}+\frac{1}{x^{k-1}}+x^{k-1}$, ebből pedig

$$x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right)-\left(\frac{1}{x^{k-1}}+x^{k-1}\right),$$

ahol az indukciós feltevés szerint a jobb oldalon

$$\left(x+\frac{1}{x}\right),\qquad\left(x^{k-1}+\frac{1}{x^{k-1}}\right),\qquad\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right)$$

egész számok, tehát $x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}$ is egész – ezzel az állításunkat beláttuk. A bizonyított állítás szerint (minden n-re)

$$x^n+\frac{1}{x^n}-[x^n]-\left[\frac{1}{x^n}\right]=\{x^n\}+\left\{\frac{1}{x^n}\right\}$$

is egész szám.

Láttuk, hogy egy ilyen alakú összeg csak akkor lehet egész szám, ha az 0 vagy 1; 0 pedig csak akkor, ha $x^n=\pm1$, azaz $x=\pm1$, ezt a lehetőséget azonban a feladat feltételei kizárják. Tehát minden n pozitív egészre $\{x^n\}+\{x^{-n}\}=1$.

Megmutatjuk, hogy található olyan x, amely eleget tesz a kiinduló feltételnek. Legyen pl. $x=\frac{3+\sqrt5}{2}$, ekkor

$$\frac{1}{x}=\frac{2}{3+\sqrt5}=\frac{6-2\sqrt5}{4}=\frac{3-\sqrt5}{2}.$$

Ezek összege egész szám, nevezetesen 3, de maguk nem egészek, tehát a törtrészeik összege 1.

Fehér Gábor (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., 10. o.t.)
Paulin Roland (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn. és Ált, Isk., 8. o.t.) dolgozatai alapján

Megjegyzések. 1. Felmerül a kérdés, hogy mely x-ekre áll fenn a feladatban adott összefüggés. Az $x+\frac{1}{x}\in\mathbb{Z}$ megállapításból $x+\frac{1}{x}=k$ (ahol $k\in\mathbb{Z}$) következik. Ebből pedig az $x^2-kx+1=0$ másodfokú egyenletet nyerjük. Ennek megoldásai a $\frac{k\pm\sqrt{k^2-4}}{2}$ alakú számok, mégpedig a $\frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2}$ reciproka éppen a $\frac{k-\sqrt{k^2-4}}{2}$. A kapott gyök minden $|k|\ge2$ egészre megoldást ad, de $|k|=2$ esetén maga a gyök is egész. Ez az x nem megfelelő, így $|k|\ge3$ szükséges; másrészt egyszerűen belátható, hogy x értéke más k-ra nem lehet egész.

2. Az x lehetséges értékeinek ismeretében *páros* k esetén könnyen látható, hogy $x^{2001}+\frac{1}{x^{2001}}$ egész, de páratlan k esetében ez már nem nem annyira nyilvánvaló. Ekkor a megoldásban is látott indukcióval (vagy az összegben keletkező 2002 tag együtthatóinak ellenőrzésével) számolható ki ugyanez. Ebből (ahogyan azt a megoldásban láttuk) már következik, hogy a törtrészeik összege is egész szám, de nem 0, tehát 1.