**I. megoldás.** Forgassuk el a $BPC$ háromszöget $B$ körül $90°$-kal úgy, hogy $C$ képe $A$ legyen. Jelölje $P'$ a $P$ elforgatottját (*1. ábra*). Ekkor a $P'BP$ háromszög egyenlő szárú és $B$-nél lévő szöge derékszög. Ezért $P'PB\sphericalangle = 45°$, valamint Pitagorasz tétele szerint $P'P^2 = P'B^2 + PB^2 = 2 \cdot PB^2$. Válasszuk az $AP$ szakasz hosszát egységnek. Ekkor a feltétel szerint $PB = 2$ és $PC = P'A = 3$. Vagyis $P'A^2 = 9 = 8 + 1 = P'P^2 + PA^2$, tehát a Pitagorasz tétel gfordításából következően a $P'PA\sphericalangle$ derékszög.

*1. ábra*

Tehát

$$APB\sphericalangle = APP'\sphericalangle + P'PB\sphericalangle = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ.$$

*Puskás Anna* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján

A fenti megoldás rövid és elegáns, azonban nehéz rájönni. A következő megoldás nem ilyen szép, viszont könnyen megtalálható.

*2. ábra*

**II. megoldás.** Most is az $AP$ szakasz hosszát válasszuk egységnek. Az $ABCD$ négyzet oldalának hossza legyen $a$. Vegyünk fel egy derékszögű koordinátarendszert úgy, hogy $A(0,0)$, $B(0,a)$ és $C(a,a)$ legyen (*2. ábra*). Ha $P$ koordinátái $x$ és $y$, akkor a távolságképlet szerint

$$PA^2 = 1 = x^2 + y^2, \tag{1}$$

$$PB^2 = 4 = x^2 + (y-a)^2, \tag{2}$$

$$PC^2 = 9 = (x-a)^2 + (y-a)^2. \tag{3}$$

Kivonva (2)-ből (1)-et, illetve (3)-ból (2)-t, kapjuk, hogy

$$3 = a^2 - 2ay,$$

$$5 = a^2 - 2ax.$$

Ezekből $y = \dfrac{a^2-3}{2a}$ és $x = \dfrac{a^2-5}{2a}$ adódik, amit (1)-be visszaírva:

$$1 = \frac{a^4 - 10a^2 + 25}{4a^2} + \frac{a^4 - 6a^2 + 9}{4a^2}.$$

Ezt rendezve az $a^2$-re nézve másodfokú $a^4 - 10a^2 + 17 = 0$ egyenletet kapjuk, amiből $a^2 = 5 \pm \sqrt{8}$. Mivel $P$ az $ABCD$ négyzet belső pontja, ezért $x > 0$, azaz $a^2 > 5$. Tehát csak az $a^2 > 5$ megoldással kell foglalkoznunk.

Írjuk fel a koszinusztételt az $APB$ háromszög $AB$ oldalára. Ha a keresett szög $APB\sphericalangle = \varphi$, akkor $AB^2 = AP^2 + BP^2 - 2 \cdot AP \cdot BP \cdot \cos\varphi$, azaz

$$5 + \sqrt{8} = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos\varphi.$$

Ebből kapjuk, hogy $\cos\varphi = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, tehát $\varphi = 135^\circ$.