**I. megoldás.** Mivel $x-y\ge\frac{xy}{25}$ és $y>0$, azért $x>\frac{xy}{25}$, amiből $25>y$. Ezért $A$-nak csak egy eleme lehet 24-nél nagyobb.

Ha $x>y$ két eleme az $A$ halmaznak, akkor

$$x-y\ge\frac{xy}{25}\quad\text{szerint}\quad y\le\frac{25\cdot x}{25+x},\quad\text{amiből}\quad y\le 25-\frac{625}{25+x}.$$

Tehát $x$ meghatározza $y$ legnagyobb értékét, mégpedig úgy, hogy nagyobb $x$ esetén $y$ megengedett legnagyobb értéke is nagyobb.

Az $A$ halmazba ezért úgy tudjuk a legtöbb elemet tenni, ha a választható legnagyobbakat tesszük be. Érdemes tehát a második legnagyobb elemet 24-nek választani. Ez meghatározza a következő legnagyobb halmazbeli elemet, ugyanis ekkor az $y\le\frac{25\cdot 24}{25+24}$ egyenlőtlenség miatt a következő legnagyobb beválasztható elem a 12, és így tovább, a további elemekre 8, 6, 4, 3, 2, 1 adódik. A legnagyobb elemre a $24\le\frac{25\cdot x}{25+x}$ egyenlőtlenségből kapunk alsó korlátot, amiből a legnagyobb szám minimális értékére 600 adódik. Ezért legfeljebb 9 eleme lehet az $A$ halmaznak. Egy lehetséges $A$ halmaz elemei pedig az 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, 600. Természetesen más 9 elemű halmaz is található, például az 1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 17, 54.

*Hablicsek Márton* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 10. évf.)
*Nagy Gábor* (Kaposvár, Táncsics Mihály Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

**II. megoldás.** Ha $x$ egy $A$ halmazbeli elem, és a nála kisebbek közül a legnagyobb $y$, akkor ezekre fennáll, hogy $x-y\ge\frac{xy}{25}$. Ez a feltétel teljesül az $y$-nál kisebb többi halmazbeli elemre is, hiszen $y$ csökkentésével az egyenlőtlenség bal oldala nő, a jobb oldal viszont csökken.

Keressük meg az adott $y$-hoz tartozó minimális $x$ értékeket. Az $(y,x)$ párok a következők: $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,4)$, $(4,5)$, $(5,7)$, $(7,10)$, $(10,17)$, $(17,54)$. Egy megfelelő $A$ halmaz az 1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 17, 54 elemeket tartalmazó halmaz, de ezen kívül megadható más ilyen halmaz is, mint azt az előző megoldásban láttuk.

Bebizonyítjuk, hogy 9-nél több eleme nem lehet az $A$ halmaznak.

Az 5 és 6 egyszerre nem lehetnek elemei a halmaznak, ugyanis $6-5<\frac{6\cdot 5}{25}$.

A 7, 8, 9 elemek közül szintén csak egy lehet az $A$ halmazban, hiszen e számokra $x-y$ értéke legfeljebb 2, a jobb oldal minimuma pedig $\frac{7\cdot 8}{25}$, ami nagyobb, mint 2.

A $[10,14]$ intervallumból is csak egyetlen elem kerülhet az $A$ halmazba, hiszen itt $x-y$ értéke maximum 4, a jobb oldal minimuma pedig $\frac{10\cdot 11}{25}$, ami nagyobb, mint 4. Hasonlóan a $[15,24]$ intervallumból is csak egyetlen elem kerülhet az $A$ halmazba, hiszen $x-y$ értéke most maximum 9, a jobb oldal minimuma pedig $\frac{15\cdot 16}{25}$, ami nagyobb, mint 9.

Az előző megoldáshoz hasonlóan igazolható, hogy nincs két olyan eleme $A$-nak, amelyek nagyobbak 24-nél. Ezért valóban legfeljebb kilenc eleme lehet az $A$ halmaznak.

*Balogh János* (Kaposvár, Táncsics Mihály Gimnázium, 12. évf.)

*Megjegyzés:* Sokan félreértették a feladatot és a megoldás számpárok halmazának elemszámát keresték, ami természetesen végtelen. Ezekre a dolgozatokra nem adtunk pontot. Nem kaptak maximális pontot azok a megoldók, akik azt a hibát követték el, hogy azt a 9 elemet, amely kielégíti a feltételt, úgy tüntették fel, mintha kizárólag az lenne a helyes megoldás.