

I. megoldás. Legyen $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = n$, $\operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} = n - 1$, $\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = n - 2$, ahol n egész szám. Megmutatjuk, hogy a feladat feltételeit (hasonlóság erejéig) legfeljebb egy háromszög elégítheti ki. Tegyük fel ugyanis, hogy az α' , β' , γ' szögű háromszög is megfelelő, azaz alkalmas k egészszel $\operatorname{ctg} \frac{\alpha'}{2} = k$, $\operatorname{ctg} \frac{\beta'}{2} = k - 1$, $\operatorname{ctg} \frac{\gamma'}{2} = k - 2$. A háromszögek félszögei a $(0, \frac{\pi}{2})$ intervallumhoz tartoznak, ott pedig a $\operatorname{ctg} x$ függvény szigorúan monoton fogyó. Ha fölteszük, hogy $k = n$, akkor $\operatorname{ctg} \frac{\alpha'}{2} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ miatt $\alpha' = \alpha$, és ugyanígy $\beta' = \beta$ és $\gamma' = \gamma$. Ha nem ez a helyzet, akkor föltehető, hogy $k > n$. Ekkor viszont $\operatorname{ctg} \frac{\alpha'}{2} > \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ miatt $\alpha' < \alpha$, és $\beta' < \beta$ és $\gamma' < \gamma$, ami lehetetlen.

Elegendő tehát egyetlen olyan háromszöget találni, ami teljesíti a feltételeket. Az ábráról könnyen leolvasható, hogy ilyen az a derékszögű háromszög, amelynek oldalai 3, 4, 5. Ennek legnagyobb szöge $\gamma = \frac{\pi}{2}$.

Filus Tamás (Szeged, Radnóti M. Kísérleti Gimn., 9. évf.) megoldása

II. megoldás. Az előző megoldás jelöléseit használjuk. A tangensfüggvényre vonatkozó addíciós képlet szerint

$$\operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} = \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha + \gamma}{2} \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}},$$

azaz

$$n - 1 = \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n-2}}{1 - \frac{1}{n(n-2)}} = \frac{2(n-1)}{n^2 - 2n - 1},$$

$$n^2 - 2n - 1 = 2,$$

$$(n - 3)(n + 1) = 0.$$

Mivel egy háromszög bármelyik szögének a fele 0 és $\frac{\pi}{2}$ közé esik és az ilyen szögek kotangense pozitív, az egyetlen megoldás $n = 3$, tehát a legnagyobb szögre $\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = 1$, vagyis γ derékszög.

Szemjon Viktória (Kárpátalja, Jánosi, Jánosi Középiskola, 11. évf.)