I. megoldás. Az e egyenes pontjait tekintve az AB és a CD zárt intervallumok egyesítésén kívüli pontokra $APB\sphericalangle = CPD\sphericalangle = 0^\circ$, az egyenes további pontjaiból pedig az egyik szakasz 0°,a másik pedig 180°-os szögben látszik, illetve ha P egybeesik valamelyik megadott ponttal, akkor az egyik szög nem értelmezhető. Az e egyenesen tehát az AB és CD zárt szakaszok kivételével minden pont megfelelő (*1. ábra*).

1. ábra

Legyen most $P \notin e$ és tegyük föl, hogy $APB\sphericalangle = CPD\sphericalangle$. A keresett ponthalmaz szimmetrikus az e egyenesre, így elegendő az e által határolt egyik félsíkban vizsgálni a keresett pontokat.

Vizsgáljuk először a „szimmetrikus" esetet, amikor a két szakasz egyenlő, $AB = CD$. Az az eltolás, ami az AB szakaszt a CD-be viszi, az A, B, P pontokon átmenő k kört – ez most létrejön – a C, D pontokon átmenő k' körbe viszi (*2. ábra*). Ha P képe P', akkor nyilván $APB\sphericalangle = CP'D\sphericalangle$, ez utóbbi tehát a feltétel szerint egyenlő a $CPD\sphericalangle$ szöggel. Mivel P és P' ugyanabban a félsíkban vannak, azért a látókör mértani hely tulajdonsága miatt P is rajta van a k' körön, a P pont tehát a k és k' körök – egyik – közös pontja.

2. ábra

2. ábra

A k' kört viszont a k tükörképeként is megkapjuk, ha a tükrözés tengelye az AB és CD szakaszok t szimmetriatengelye. Mivel pedig körnek és tükörképének a közös pontjai – ha vannak – illeszkednek a tükrözés tengelyére, a P pont rajta van a t egyenesen. Az pedig nyilvánvaló, hogy ennek a tengelynek minden pontja hozzátartozik a keresett halmazhoz.

A fenti gondolatmenet alkalmas kiterjesztésével az általános, $AB \neq CD$ esetben is megkapjuk a megoldást. Tekintsük azt a pozitív arányú középpontos hasonlóságot, ami az AB szakaszt a CD-be viszi. (Ha $AB \neq CD$, akkor ilyen létezik, középpontja, O, az e egyenesen van, aránya $\lambda = \frac{CD}{AB}$). Az A, B, P pontokon átmenő k kört ez a hasonlóság a C, D pontokon átmenő k' körbe viszi (*3. ábra*).

3. ábra

Ha P képe P', akkor a speciális eset gondolatmenetét követve $APB\sphericalangle = CP'D\sphericalangle$, hiszen a középpontos hasonlóság szögtartó, a feltétel szerint pedig $APB\sphericalangle = CPD\sphericalangle$. Így $CP'D\sphericalangle = CPD\sphericalangle$, P a k' körön is rajta van, a két kör, k és k' a P pontban metszik egymást.

Az O pont választásából $\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{OC}{OD}$, azaz

$$OA \cdot OD = OC \cdot OB,$$

az AB szakaszt tehát a középpontos hasonlóságon kívül az O pólusú,

$$r = \sqrt{OA \cdot OD} = \sqrt{OC \cdot OB}$$

sugarú *inverzió* is a CD szakaszba viszi (*4. ábra*). Ez az inverzió a k kört egy olyan körbe viszi, ami átmegy a C és D pontokon, továbbá az inverzió pólusa, O hasonlósági centruma a k körnek és a képének. Mindez egyértelműen határozza meg a k' kört, így a k kört a fenti inverzió is a k'-be viszi. Ha pedig egy kör és az inverze metszik egymást, akkor a metszéspont rajta van az inverzió alapkörén. A P pont így rajta van az O középpontú r sugarú k^* körön.

4. ábra

Megmutatjuk, hogy k^* minden pontja hozzátartozik a keresett ponthalmazhoz.

A k^* elválasztja az AB és a CD szakaszokat, így az a két pont, ahol az e egyenest metszi, a mértani helyhez tartozik. Ha P olyan pont a k^* körön, ami nincs rajta az e egyenesen, akkor az A, B, P pontokon átmenő k kört mind az O középpontú $\lambda = \dfrac{CD}{AB}$ arányú hasonlóság, mind pedig a k^* körre vonatkozó inverzió ugyanabba a k' körbe viszi

(*5. ábra*). Mivel az inverzió során a P képe önmaga, a P ponton a k' kör is áthalad. Ha pedig a középpontos hasonlóság során a P képe P', akkor a $APB\sphericalangle = CP'D\sphericalangle$, a kerületi szögek tétele szerint pedig a k' körben $CP'D\sphericalangle = CPD\sphericalangle$. A két egyenlőséget összevetve $APB\sphericalangle = CPD\sphericalangle$ valóban.

5. ábra

II. megoldás. Húzzuk meg a BPC szög belső szögfelezőjét és messe ez az e egyenest a P-től függő M_P pontban.

Nyilvánvaló, hogy $APB\sphericalangle = CPD\sphericalangle$ pontosan akkor teljesül, ha PM_P felezi az $APD\sphericalangle$ szöget is (*6. ábra*). Ha $AP = PD$, akkor PM_P merőleges az e-re és így $BP = PC$ is teljesül, M_P felezi AD-t és BC-t is, tehát $AB = CD$, az ábra szimmetrikus a PM_P egyenesre, P tehát rajta van a szimmetriatengelyen, amelynek nyilván minden pontja megfelelő.

6. ábra

A továbbiakban tegyük fel, hogy $AB \neq CD$, ami azt jelenti, hogy az $\dfrac{AP}{PD} = \lambda_1$, illetve a $\dfrac{BP}{PC} = \lambda_2$ arányok értéke nem 1. Ez azt jelenti, hogy P rajta van az A és D pontokhoz tartozó λ_1, illetve a B és C pontokhoz tartozó λ_2 arányú Apollóniusz-féle körön. A szögfelező-tétel szerint mindkét kör áthalad az M_P ponton is, így a körök középpontja rajta van PM_P felező merőlegesén, ami most nem párhuzamos e-vel. Ismeretes, hogy a körök középpontja az e egyenesen is rajta van, ez viszont azt jelenti, hogy a két Apollóniusz-kör középpontja egybeesik, a két kör tehát azonos (*7. ábra*).

7. ábra

8. ábra

8. ábra

Jelölje a körök közös középpontját O_P. Ismeretes, hogy ha a K, L pontokhoz tartozó $\lambda \neq 1$ arányú Apollóniusz-kör középpontja O, sugara r, akkor $OK \cdot OL = r^2$ (*8. ábra*). A két kör középpontja és sugara most azonos, így

$$r^2 = O_P A \cdot O_P D = O_P B \cdot O_P C.$$

A kapott egyenlőséget átrendezve $\dfrac{O_PC}{O_PA} = \dfrac{O_PD}{O_PB}$, az O_P tehát az a pont az e egyenesen, ahonnan az AB szakaszt a CD-be nagyítható (vagy kicsinyíthető). Ennek a pontnak a helyzete pedig nem függ a P ponttól, csak az AB és CD szakaszok helyzetétől, $O_P = O$ a két szakasz külső hasonlósági pontja. Az $M_P = M$ pont helyzete sem függ tehát P-től és a két egybeeső Apollóniusz-kör sem. Ha tehát $AB \neq CD$ és $APB\sphericalangle = CPD\sphericalangle$, akkor P rajta van az O középpontú $r = \sqrt{OA \cdot OD} = \sqrt{OB \cdot OC}$ sugarú körön, ahol O a két szakasz, AB és CD külső hasonlósági pontja.

A megfordítás most már nyomban adódik az Apollóniusz-féle kör mértani hely tulajdonságából és a szögfelező-tételből. Ha P egy tetszőleges pont a közös Apollóniusz-körön és $P \notin e$ – ami nyilván föltehető – akkor egyrészt $\dfrac{AP}{PD} = \dfrac{AM}{MD}$ és így PM felezi az $APD\sphericalangle$ szöget, másfelől ugyanígy $\dfrac{BP}{PC} = \dfrac{BM}{MC}$ és így PM felezi a $BPC\sphericalangle$ szöget is. Ebből pedig valóban $APB\sphericalangle = CPD\sphericalangle$ következik.