I. megoldás. Vizsgáljuk meg egy adott kék háromszög és a vele szemben lévő piros háromszög területének különbségét. Ha a tízszög oldalának hosszát 2 egységnek választjuk, akkor minden színes háromszög területének mérőszáma megegyezik a háromszög azon magasságának mérőszámával, amely a tízszög belsejében kijelölt P ponthoz tartozik. Ezért két szemközti háromszög területének különbsége egyenlő a P-ből induló magasságaik különbségével. Mivel a tízszög szemközti oldalai párhuzamosak, azért a két magasságvonal egy egyenesbe esik. Így a két magasságszakasz különbsége megegyezik a PF távolság kétszeresével, ahol F a tízszög két párhuzamos oldala által a magasságok közös egyeneséből kimetszett szakasz felezőpontja (lásd az *1. ábrát*).

1. ábra

Jelöljük a tízszög középpontját O-val, $\mathbf{m}_1$, $\mathbf{m}_2$, $\mathbf{m}_3$, $\mathbf{m}_4$ és $\mathbf{m}_5$ pedig legyenek olyan O-ból induló egységvektorok, amelyek merőlegesek a tízszög egy-egy szemközti oldalpárjára, és az oldalpárnak mindig a piros háromszöghöz tartozó oldala felé mutatnak. Ezen öt vektor összege $\mathbf{0}$; tekinthetjük őket ugyanis egy szabályos ötszög középpontjából az ötszög csúcsaiba mutató vektoroknak. Mivel PF párhuzamos valamelyik $\mathbf{m}_i$ vektorral, azért az előjeles PF távolság éppen $\overrightarrow{OP} \cdot \mathbf{m}_i$ $PF = OP \cdot \cos\alpha = \overrightarrow{OP} \cdot \mathbf{m}_1$, (*2. ábra*). Vagyis a piros és a kék háromszögek területkülönbségének összege:

$$2\overrightarrow{OP}\cdot\mathbf{m}_1+2\overrightarrow{OP}\cdot\mathbf{m}_2+2\overrightarrow{OP}\cdot\mathbf{m}_3+2\overrightarrow{OP}\cdot\mathbf{m}_4+2\overrightarrow{OP}\cdot\mathbf{m}_5=2\overrightarrow{OP}\cdot\mathbf{0}=0,$$

azaz a piros és a kék területek egyenlőek.

2. ábra

Bergmann Gábor (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., 11. évf.)

II. megoldás. Ismert, hogy ha egy háromszög egyik csúcsából a másik két csúcsba mutató vektorok $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$, akkor a háromszög területének kétszerese $|\mathbf{x} \times \mathbf{y}|$ (*3. ábra*).

3. ábra

Jelöljük a tízszög középpontjából a sokszög csúcsaiba mutató vektorokat $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{10}$-zel, az adott belső pontba mutató vektort pedig $\mathbf{p}$-vel.

A sokszög területe ekkor $5|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|$, továbbá nyilván igaz, hogy $\mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_{i+1} = \mathbf{a}_{i+1} \times \mathbf{a}_{i+2}$ (az indexeket modulo 10 értve). Elegendő azt megmutatnunk, hogy a kék háromszögek területének kétszerese megegyezik a tízszög területével, azaz

$$\big|(\mathbf{a}_1 - \mathbf{p}) \times (\mathbf{a}_2 - \mathbf{p}) + (\mathbf{a}_3 - \mathbf{p}) \times (\mathbf{a}_4 - \mathbf{p}) + \cdots + (\mathbf{a}_9 - \mathbf{p}) \times (\mathbf{a}_{10} - \mathbf{p})\big| = 5|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|.$$

Ez viszont azonnal adódik, ha a bal oldalon elvégezzük a műveleteket és felhasználjuk, hogy $\mathbf{p} \times \mathbf{p} = \mathbf{0}$, valamint $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \cdots + \mathbf{a}_{10} = \mathbf{0}$. (Az $(\mathbf{a}_i - \mathbf{p}) \times (\mathbf{a}_{i+1} - \mathbf{p})$ vektorok párhuzamosak és azonos állásúak, ezért abszolút értékük összege – a kék háromszögek területösszegének kétszerese – egyenlő az összegük abszolút értékével.)