I. megoldás. Jelölje a négy kis paralelogramma területét t_a, t_b, t_c, t_d, a nagy paralelogramma területét T.

Tudjuk, hogy a paralelogramma átlója felezi a területét.

Ekkor a háromszögek területeit a „leeső” részek figyelembevételével felírhatjuk így:

$$T_{AQR}=T-\left(\frac{t_c}{2}+\frac{t_a+t_b}{2}+\frac{t_a+t_d}{2}\right);\quad T_{BRS}=T-\left(\frac{t_d}{2}+\frac{t_a+t_b}{2}+\frac{t_b+t_c}{2}\right);$$

$$T_{CSP}=T-\left(\frac{t_a}{2}+\frac{t_c+t_d}{2}+\frac{t_b+t_c}{2}\right);\quad T_{DPQ}=T-\left(\frac{t_b}{2}+\frac{t_a+t_d}{2}+\frac{t_c+t_d}{2}\right).$$

A négy háromszög területének összege:

$$T_{\text{össz}}=4T-\frac{5(t_a+t_b+t_c+t_d)}{2}.$$

Tudjuk, hogy $T=t_a+t_b+t_c+t_d$. Ennek alapján $T_{\text{össz}}=4T-\dfrac{5T}{2}=\dfrac{3}{2}T=\dfrac{3}{2}\cdot 2=3$.

Tehát a négy háromszög területének összege 3 egység.

Tassy Gergely (Budapest, Veres Péter Gimnázium, 9. o.t.)

II. megoldás. Készítsünk ábrát a példának megfelelően.

Legyen a keresett területösszeg t. A paralelogramma magasságát jelöljük m-mel, annak két részét az *ábra* szerint

m_1-gyel és m_2-vel. Írjuk fel az egyes háromszögek területét:

$$T_{AQR} = 2 - \frac{DR \cdot m + AB \cdot m_1 + RC \cdot m_2}{2},$$

$$T_{BRS} = 2 - \frac{RC \cdot m + AB \cdot m_1 + DR \cdot m_2}{2},$$

$$T_{DPQ} = 2 - \frac{AP \cdot m + PB \cdot m_1 + DC \cdot m_2}{2},$$

$$T_{CSP} = 2 - \frac{PB \cdot m + AP \cdot m_1 + DC \cdot m_2}{2}.$$

A területeket összeadva:

$$t = 8 - \frac{DR \cdot m + AB \cdot m_1 + RC \cdot m_2}{2} - \frac{RC \cdot m + AB \cdot m_1 + DR \cdot m_2}{2} -$$

$$- \frac{AP \cdot m + PB \cdot m_1 + DC \cdot m_2}{2} - \frac{PB \cdot m + AP \cdot m_1 + DC \cdot m_2}{2}.$$

Ezt tovább alakítva:

$$2t = 16 - m \cdot (DR + RC + AP + PB) -$$

$$-m_1 \cdot (AB + AB + PB + AP) - m_2 \cdot (RC + DR + DC + DC)\,,$$

$$2t = 16 - 2m \cdot AB - 3m_1 \cdot AB - 3m_2 \cdot AB = 16 - AB\big(2m + 3(m_1 + m_2)\big).$$

Mivel $AB\big(2m + 3(m_1 + m_2)\big) = AB \cdot 5m = 10$, ezért $2t = 6$, és így az AQR, BRS, DQR és CSP háromszögek területének az összege 3 egység.

Kiss-Tóth Christian (Budapest, Árpád Gimnázium, 9. o.t.)