

a) A 3×3 -as kocka felszíne 54 cm^2 , ezért mindhárom színnel pontosan 54 lapot kell befestenünk. Osszuk a 27 kis kockát három csoportba. Az elsőbe tartozó 3 kocka mindegyikét két színnel fessük úgy, hogy 3–3 egy csúcsban találkozó lap azonos színű legyen, és mindhárom szín 2–2 kockán szerepeljen. A második csoportba tartozó 3×6 kis kocka közül az első 6 kockának három egy csúcsban találkozó lapját fessük lilára, további két lapját fehérre, a hatodikat pedig sárgára. A második, illetve a harmadik hatos csoportnál három-három egy csúcsban találkozó lapot fessünk fehérre, illetve sárgára, további két-két lapot sárgára illetve lilára, a hatodik lapokat pedig lilára, illetve fehérre. Így minden színű lapból ugyanannyi van a második csoportba tartozó kis kockákon. Végül a harmadik csoportba tartozó 6 kis kocka mindegyikén két-két szomszédos lapot fessünk lilára, sárgára és fehérre.

Ha nagy lila kockát akarunk összerakni, akkor az első és a második csoportból válasszuk ki azt az összesen 8 kis kockát, melyeknek 3–3 lila lapja van. Ezek kerüljenek a nagy kocka csúcsaiba. A második csoport 6 olyan kockája, amelyeknek két lila lapja van, valamint a harmadik csoport 6 kockája együtt a nagy kocka 12 élének közepére kerül. A második csoport megmaradt 6 kockájának egyetlen lila lapja van: ezeket illesszük a nagy kocka hat lapjának közepére a lila lapjukkal kifelé; végül az első csoport maradék kockáját – amelyiknek nincs lila lapja –, tegyük a nagy kocka közepére.

A többi színből is ugyanígy állíthatunk össze nagy kockát, hiszen a színezés olyan, hogy a színek szerepe felcserélhető.

b) Ha két kis kocka összesen 12 lapját fehérre festjük, akkor biztosan nem tudunk nagy lila kockát összerakni, mert a nagy kockában csak egy olyan kis kocka van – a középső –, amelynek egyetlen lapja sem látható. Ezért $6 \cdot 27 - 12 = 150$ lap lilára festése nem elég. Ha viszont 151 lapot festünk lilára, akkor már biztosan összerakható egy nagy lila kocka. Ekkor ugyanis legalább 16 kocka teljes egészében lila (ellenkező esetben a lila lapok száma legfeljebb $15 \cdot 6 + 12 \cdot 5 = 150$ lenne), a többi 11 kocka közül pedig legalább 6-nak van négyenél több lila lapja (mert $16 \cdot 6 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 4 = 150$). Ebből a 22 darab, legalább öt lila lappal rendelkező kis kockából kirakhatjuk a nagy kocka 8 sarkát és 12 élének közepét, a maradék kockák közül pedig legfeljebb egynek nincs lila lapja, az kerül a nagy kocka közepére, a többi pedig a nagy lapok közepére.

Ambrus Gergely (Szeged, Radnóti M. Gimn., 12. évf.) dolgozata alapján

