I. megoldás. Egy csonkagúlát, amelynek alaplapja A, fedőlapja B területű ($B < A$) egészítsünk ki gúlává. A „hozzátett" és a hozzátevéssel kapott gúlák középpontosan hasonlóak. Ha a csonkagúla magassága m, a teljes gúláé pedig $m+x$, akkor a megfelelő gúlák hasonlóságából $(m+x) : x = \sqrt{A} : \sqrt{B}$, ahonnan $x = m\dfrac{\sqrt{B}}{\sqrt{A}-\sqrt{B}}$. Ezért a teljes gúla térfogata $V = \dfrac{m+x}{3}A = \dfrac{m}{3}\dfrac{A\sqrt{A}}{\sqrt{A}-\sqrt{B}}$, a csonkagúláé pedig $V\left(1-\left(\dfrac{x}{m+x}\right)^3\right) = V\left(1-\dfrac{B\sqrt{B}}{A\sqrt{A}}\right)$.

A csonkagúla kettévágásakor keletkezett „alsó" csonkagúla alaplapja ugyancsak A, fedőlapjának (ismeretlen) területét jelöljük C-vel. Mivel ugyanarra a V térfogatú gúlára egészíthető ki, mint az eredeti csonkagúla, a térfogata az imént levezetett képlet szerint $V\left(1-\dfrac{C\sqrt{C}}{A\sqrt{A}}\right)$. A feladat feltétele tehát:

$$1-\frac{C\sqrt{C}}{A\sqrt{A}} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{B\sqrt{B}}{A\sqrt{A}}\right).$$

Rendezve:

$$2A\sqrt{A}-2C\sqrt{C} = A\sqrt{A}-B\sqrt{B},$$

$$\frac{A\sqrt{A}+B\sqrt{B}}{2} = \left(\sqrt{C}\right)^3,$$

ennek megoldása pedig

$$C = \left(\frac{A\sqrt{A}+B\sqrt{B}}{2}\right)^{2/3} = \left(\frac{16\sqrt{2}+1}{2}\right)^{2/3} \approx 5.19\ \mathrm{cm}^2.$$

II. megoldás. Jelölje a csonkagúla térfogatát V, a részek térfogatát V_1 és V_2, a hozzájuk tartozó magasságokat m_1 és m_2, a síkmetszet területét x.

A teljes gúla térfogata

$$V = \frac{(m_1+m_2)}{3}\left(8+\sqrt{8}+1\right); \quad V_1 = \frac{m_1}{3}\left(8+\sqrt{8x}+x\right); \quad V_2 = \frac{m_2}{3}\left(x+\sqrt{x}+1\right).$$

A térfogatok egyenlőségéből, valamint abból, hogy a $V_1+V_2=V$, a térfogatok háromszorosára felírhatjuk:

$$(1) \qquad m_1\left(8+x+\sqrt{8x}\right) = m_2\left(x+\sqrt{x}+1\right),$$

$$(2) \qquad m_1\left(8+x+\sqrt{8x}\right)+m_2\left(x+1+\sqrt{x}\right) = (m_1+m_2)\left(9+\sqrt{8}\right).$$

(1)-ből fejezzük ki m_1-et:

$$m_1 = \frac{m_2\left(x+1+\sqrt{x}\right)}{8+x+\sqrt{8x}}.$$

Ezt helyettesítve (2)-be:

$$m_2\left(x+1+\sqrt{x}\right)+m_2\left(x+1+\sqrt{x}\right) = \left[\frac{m_2\left(x+1+\sqrt{x}\right)}{8+x+\sqrt{8x}}+m_2\right]\left(9+\sqrt{8}\right).$$

Végezzük el a kijelölt műveleteket és egyszerűsítsünk $m_2 \neq 0$-val, valamint vezessük be a $\sqrt{x}=a$ új ismeretlent. Ekkor a következő negyedfokú egyenlethez jutunk:

$$2a^4+\left(2+4\sqrt{2}\right)a^3-\left(1+16\sqrt{2}\right)a-\left(65+18\sqrt{2}\right)=0.$$

Az első 2 tagból kiemelhetjük a $2a^3$-t, kapjuk, hogy

$$2a^3\left(a+1+2\sqrt{2}\right)-\left(1+16\sqrt{2}\right)a-\left(65+18\sqrt{2}\right)=0.$$

Nézzük meg, hogy $\left(a+1+2\sqrt{2}\right)$ osztója-e az egyenletben szereplő másik két tag összegének, azaz létezik-e olyan c szám, amelyre a

$$c\left(a+1+2\sqrt{2}\right) = \left(16\sqrt{2}+1\right)a+65+18\sqrt{2}$$

egyenlőség teljesül. Az együtthatók egyenlőségéből következik, hogy

$$ca = \left(16\sqrt{2}+1\right)a.$$

Ez $c = 16\sqrt{2} + 1$ választással teljesül, és valóban

$$\left(16\sqrt{2} + 1\right)\left(2\sqrt{2} + 1\right) = 64 + 16\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 1 = 65 + 18\sqrt{2}.$$

Így a polinom szorzattá alakítható: $\left(2a^3 - 1 - 16\sqrt{2}\right)\left(a + 1 + 2\sqrt{2}\right)$. A második tényező egyetlen gyöke negatív, ami nem lehetséges $\left(a = \sqrt{x}\right)$. Az első tényező egyetlen valós gyöke $a = \sqrt[3]{\dfrac{1 + 16\sqrt{2}}{2}} \approx 2{,}27752$, azaz a síkmetszet területe $x = a^2 \approx 5{,}187\ \mathrm{cm}^2$.

Megjegyzés. A feladat valójában – ahogy az a megoldásokból is kiderül – nem feltétlenül csonkagúlákról, hanem általában „csonkagúlaszerű” testekről szólt; csak az számított a végeredmény szempontjából, hogy az alap- és a fedőlapnak mekkora a területe, alakjuk viszont közömbös. Ezért nem tekintettük hibásnak azokat a megoldásokat sem, amelyek csonkagúla helyett csonkakúppal számoltak.