**I. megoldás.** A binomiális tétel szerint

$$\left(1+\sqrt{3}\right)^{2n}=\sum_{i\ \text{páros}}\binom{2n}{i}\left(\sqrt{3}\right)^{i}+\sum_{i\ \text{páratlan}}\binom{2n}{i}\left(\sqrt{3}\right)^{i},$$

illetve

$$\left(1-\sqrt{3}\right)^{2n}=\sum_{i\ \text{páros}}\binom{2n}{i}\left(\sqrt{3}\right)^{i}-\sum_{i\ \text{páratlan}}\binom{2n}{i}\left(\sqrt{3}\right)^{i}.$$

A bizonyítandó állításban szereplő összeg így éppen

$$a_n=\frac{1}{2}\left[\left(1+\sqrt{3}\right)^{2n}+\left(1-\sqrt{3}\right)^{2n}\right].$$

Vegyük észre másfelől, hogy

$$\left(1+\sqrt{3}\right)^{2n}=\left[\left(1+\sqrt{3}\right)^{2}\right]^{n}=\left(4+2\sqrt{3}\right)^{n}=2^{n}\left(2+\sqrt{3}\right)^{n}$$

és ugyanígy $\left(1-\sqrt{3}\right)^{2n}=2^{n}\left(2-\sqrt{3}\right)^{n}$.

Eszerint $a_n=2^{n-1}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^{n}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{n}\right]$, így elegendő igazolnunk, hogy $\left(2+\sqrt{3}\right)^{n}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{n}$ páros szám.

Ez ismét a binomiális tételből következik: a két kifejtésben a $\sqrt{3}$ páros kitevőjű hatványait tartalmazó tagok értéke egyenlő, a páratlan kitevőjű hatványokat tartalmazó tagok pedig egymás ellentettjei. Eszerint

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{n}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{n}=2\sum_{i\ \text{páros}}\binom{n}{i}\left(\sqrt{3}\right)^{i}2^{n-i}.$$

Mivel $\left(\sqrt{3}\right)^{i}$ egész, ha $i$ páros, ezért $\left(2+\sqrt{3}\right)^{n}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{n}$ egy egész szám kétszerese, tehát valóban páros.

*Kevei Péter* (Szeged, Radnóti Miklós Gimn., 12. évf.)

*Megjegyzés.* A megoldás során valójában az alábbi azonosságot alkalmaztuk két alkalommal:

$$(a+b)^n+(a-b)^n=2\sum_{i\ \text{páros}}\binom{n}{i}b^{i}a^{n-i}.$$

**II. megoldás.** Az első megoldáshoz hasonlóan indulva az alapvető észrevétel ismét az, hogy a feladatban szereplő összeg,

$$a_n=\binom{2n}{0}+\binom{2n}{2}3+\dots+\binom{2n}{2n}3^{n}$$

az $\left(1+\sqrt{3}\right)^{2n}$ binomiális kifejtésének „racionális része”, $\left(1+\sqrt{3}\right)^{2n}=a_n+b_n\sqrt{3}$, ahol $b_n$ is egész szám.

Másfelől $\left(1+\sqrt{3}\right)^{2n}=\left(4+2\sqrt{3}\right)^{n}=2^{n}\left(2+\sqrt{3}\right)^{n}$. Ismét a binomiális tétel szerint

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{n}=c_n+d_n\sqrt{3},$$

ahol $c_n$ és $d_n$ is egész számok. A két kifejtés egyenlőségéből:

$$a_n+b_n\sqrt{3}=2^n\cdot c_n+2^n\cdot d_n\sqrt{3}.$$

A bizonyítandó állítás, $2^n\mid a_n$, most már következik abból, hogy ha egy valós szám felírható $p+q\sqrt{3}$ alakban, ahol $p$ és $q$ racionális számok, akkor ez a felírás egyértelmű. Ekkor ugyanis $a_n=2^nc_n$, ahol $c_n$ egész.

Az egyértelműség bizonyításához legyen $p_1+q_1\sqrt{3}=p_2+q_2\sqrt{3}$, $p_i,q_i\in\mathbb{Q}$. Rendezés után

$$p_1-p_2=(q_2-q_1)\sqrt{3}.$$

Ha $q_1\neq q_2$, akkor a bal oldalon egy racionális, a jobb oldalon pedig egy irracionális szám áll, ami nem lehetséges. Így $q_1=q_2$ és akkor persze $p_1=p_2$.

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

*Sparing Dániel* (Budapest, ELTE Radnóti Miklós Gyakorló Gimn., 11. évf.)

*Megjegyzések.* 1. A feladat állítását sokan teljes indukcióval bizonyították, felhasználva a binomiális együtthatók között fennálló $\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}$ alapvető összefüggést. A bizonyításhoz így szükség volt egy másik oszthatóság kimondására és párhuzamos bizonyítására:

$$2^n \;\Big|\; \binom{2n}{1}+\binom{2n}{3}3+\dots+\binom{2n}{2i+1}3^i+\dots+\binom{2n}{2n-1}3^{n-1}.$$

*Kocsis Albert Tihamér* (Budapest, Fazekas Mihály Gimnázium, 10. évf.) megoldásából kiderül a két mennyiség közti kapcsolat.

Bevezetve az $a_n=\sum_{i=0}^{n}\binom{2n}{2i}3^i$ és a $b_n=\sum_{i=0}^{n-1}\binom{2n}{2i+1}3^i$ mennyiségeket

$$\left(1+\sqrt{3}\right)^{2n}=a_n+b_n\sqrt{3}$$

és a II. megoldásban látottak értelmében ez a felírás egyértelmű.

$$\left(1+\sqrt{3}\right)^{2n+2}=\left(1+\sqrt{3}\right)^2\left(1+\sqrt{3}\right)^{2n}=\left(4+2\sqrt{3}\right)\left(a_n+b_n\sqrt{3}\right)=$$

$$=(4a_n+6b_n)+(4b_n+2a_n)\sqrt{3}.$$

A hivatkozott egyértelműség miatt $a_{n+1}=4a_n+6b_n$ és $b_{n+1}=4b_n+2a_n$. Mivel $\left(\sqrt{3}+1\right)^2=4+2\sqrt{3}$, $a_1=4$ és $b_1=2$, így innen és a kapott rekurziókból teljes indukcióval nyomban adódik, hogy $2^n\mid a_n$ és a bizonyításhoz ugyancsak szükséges $2^n\mid b_n$.

2. Érdekes utat választott *Rácz Béla András* (Budapest, Fazekas Mihály Gimnázium, 10. évf.). A vizsgált összegnek az I. megoldásból ismert „szimmetrikus alakját” felírva:

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{2n}{2i}3^i=\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^{2n}+\left(1-\sqrt{3}\right)^{2n}}{2}$$

bevezette az

$$e_k=\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^{k}+\left(1-\sqrt{3}\right)^{k}}{2}$$

sorozatot. Maga a sorozat egy másodrendű lineáris rekurzió: $e_{k+2}=t\cdot e_{k+1}+s\cdot e_k$ explicit alakja. Ezt tudva magát a rekurziót is könnyű megtalálni. Az együtthatók: $t=s=2$ és így

$$(*)\qquad e_{k+2}=2e_{k+1}+2e_k.$$

Mivel $e_0=e_1=1$, azért a $(*)$ rekurziót felhasználva teljes indukcióval közvetlenül adódik, hogy ha $k\ge 2m$, akkor $2^m\mid e_k$. Ha $k=2n=2m$, akkor éppen a feladat állítását kapjuk.