

Ha az adott egyenletben x helyébe a pozitív számok halmazán mindenütt értelmes $\frac{1}{x}$ -et helyettesítünk, akkor az

$$f\left(\frac{1}{x}\right) + 2f(x) = 3 \cdot \frac{1}{x} + 6$$

összefüggéshez jutunk. Az eredeti feltétellel együtt egy kétismeretlenes egyenletrendszert kaptunk az $f(x)$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$ ismeretlenekre.

$$(1) \quad f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x + 6,$$

$$(2) \quad f\left(\frac{1}{x}\right) + 2f(x) = \frac{3}{x} + 6.$$

Az első egyenletből vonjuk ki a második kétszeresét:

$$-3f(x) = 3x - \frac{6}{x} - 6,$$

azaz

$$f(x) = \frac{2}{x} - x + 2.$$

Ekkor $f\left(\frac{1}{x}\right) = 2x - \frac{1}{x} + 2$, és behelyettesítve látható, hogy a kapott függvényre teljesül a feltétel. Egyetlen olyan függvény létezik tehát, amelyre teljesül a feladat egyenlete.

Orbán Zsolt (Nagykanizsa, Batthyány Lajos Gimn., 8. évf.)