A feladat megoldásai során az e szám 130–138. oldalain megtalálható *„Amit jó tudni a háromszögekről"* című cikkben szereplő jelöléseket és eredményeket használjuk.

1. ábra

I. megoldás. Az $O_aO_bO_c$ háromszög területe megegyezik az ABC, O_aBC, O_bCA és O_cAB háromszögek területének összegével (*1. ábra*). Ezért azt kell megmutatnunk, hogy

$$T+\frac{a\cdot r_a}{2}+\frac{b\cdot r_b}{2}+\frac{c\cdot r_c}{2}\ge 4T.$$

Ezt rendezve és a 8. állítást felhasználva a bizonyítandó egyenlőtlenség:

$$a\cdot\frac{T}{s-a}+b\cdot\frac{T}{s-b}+c\cdot\frac{T}{s-c}\ge 6T,\quad \text{azaz}\quad \frac{a}{s-a}+\frac{b}{s-b}+\frac{c}{s-c}\ge 6.$$

Mivel $\frac{a}{s-a}=\frac{s}{s-a}-1$, $\frac{b}{s-b}=\frac{s}{s-b}-1$ és $\frac{c}{s-c}=\frac{s}{s-c}-1$, elég azt megmutatni, hogy

$$\frac{s}{s-a}+\frac{s}{s-b}+\frac{s}{s-c}\ge 9,$$

illetve hogy az ennek átrendezésével kapott

$$\frac{\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}}{3}\ge\frac{3}{s}$$

egyenlőtlenség fennáll. Ez utóbbi viszont következik a számtani és a harmonikus közepek közti egyenlőtlenségből, mert aszerint:

$$\frac{3}{\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}}\le\frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3}=\frac{s}{3}.$$

Sásdy Gabriella (Szentendre, Ferences Gimn., 12. évf.) dolgozata alapján

II. megoldás. Írjuk fel az $O_aO_bO_c$ háromszög területét ugyanúgy, mint az I. megoldásban:

$$T_{O_aO_bO_c}=s\cdot r+\frac{a\cdot r_a}{2}+\frac{b\cdot r_b}{2}+\frac{c\cdot r_c}{2}.$$

A 8. állításból következik, hogy $s\cdot r=(s-a)r_a$, azaz $a\cdot r_a=s\cdot r_a-s\cdot r$. Ezért $2T_{O_aO_bO_c}=sr+(sr_a-sr)+(sr_b-sr)+(sr_c-sr)=s(r_a+r_b+r_c-r)$. Vagyis a 10. állítást felhasználva: $2T_{O_aO_bO_c}=s\cdot 4R$, azaz $T_{O_aO_bO_c}=2Rs$. A 12. állítás szerint $R\ge 2r$, tehát $T_{O_aO_bO_c}=2\cdot R\cdot s\ge 2\cdot 2\cdot r\cdot s=4T$, ami éppen a bizonyítandó állítás.

Rácz Judit (Szekszárd, Garay J. Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

III. megoldás. Az 5. állítás szerint az $O_aO_bO_c$ háromszög szögei $\frac{\alpha+\beta}{2}$, $\frac{\beta+\gamma}{2}$ és $\frac{\gamma+\alpha}{2}$, a 7. következmény szerint pedig az e háromszög köré írható kör sugara $2R$. Ezért a 3. állítás alapján

$$T_{O_aO_bO_c}=2\cdot(2R)^2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}.$$

Mivel $\alpha+\beta+\gamma=180°$, ezért $\frac{\alpha+\beta}{2}=90°-\frac{\gamma}{2}$, $\frac{\beta+\gamma}{2}=90°-\frac{\alpha}{2}$ és $\frac{\gamma+\alpha}{2}=90°-\frac{\beta}{2}$, tehát $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}$. Vagyis a 17. állítás utolsó része szerint $T_{O_aO_bO_c}=8R^2\cdot\frac{s\cdot T}{abc}$.

Elegendő tehát megmutatnunk, hogy $\frac{8R^2\cdot s}{abc}\ge 4$, vagyis a 2. állítást használva azt, hogy $\frac{abc\cdot s}{2T^2}\ge 4$. Ez viszont éppen a 18. állítás bizonyítása során már belátott $\frac{T^2}{s\cdot abc}\le\frac{1}{8}$ egyenlőtlenség egy átrendezett alakja.