

Jelöljük a háromszög csúcsait és oldalait a szokásos módon A, B, C és a, b, c -vel; a beírt körének középpontja legyen O , sugara r ; a beírt körnek az oldalakon lévő érintési pontjai pedig D, E, F (lásd az *ábrát*). Legyen a háromszög területe T , a $CE = CD$ szakasz hossza pedig z . Mivel egy külső pontból egy körhöz húzott két érintőszakasz hossza egyenlő, azért $AE = AF = x$ és $BF = BD = y$. Vagyis $a = z + y$, $b = z + x$ és $c = x + y$, amiből az $a + b + c = 2s$ jelölést bevezetve kapjuk, hogy $x = s - a$, $y = s - b$ és $z = s - c$.

Az OCD háromszögben D -nél derékszög van, C -nél lévő szöge pedig $\frac{\gamma}{2}$, mert az O pont az ABC háromszög belső

szögfelezőinek metszéspontja. Ezért $\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = \frac{CD}{OD} = \frac{z}{r}$. Vagyis a bizonyítandó állítás:

$$T = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{r}.$$

Az OAB , OBC , OCA háromszögek területének összege megegyezik az ABC háromszög területével, ezért

$$T = \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2} = s \cdot r, \quad \text{azaz} \quad r = \frac{T}{s}.$$

Elegendő tehát azt megmutatnunk, hogy

$$T = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{\frac{T}{s}}, \quad \text{vagyis} \quad T^2 = s(s-a)(s-b)(s-c).$$

Ez viszont éppen *Héron képlete*, ami bizonyítja állításunkat.