Jelölje a feladatban megadott kétváltozós polinomot $f(t,s)$. Ez mindkét változójában másodfokú; rendezzük az egyik változó, például a t hatványai szerint:

$$f(t,s)=6t^2-(4s+8)t+3s^2+6s+5.$$

Alakítsuk ezt t szerint teljes négyzetté:

$$f(t,s)=6\left(t-\frac{s+2}{3}\right)^2+\frac{7}{3}s^2+\frac{10}{3}s+\frac{7}{3}.$$

Innen kiolvasható, hogy az s rögzített értékére $f(t,s)$ legkisebb értéke $\frac{7}{3}s^2+\frac{10}{3}s+\frac{7}{3}$, amit akkor vesz föl, ha $t=\frac{s+2}{3}$. Ennek a minimumnak a legkisebb értéke szintén teljes négyzetté alakítással kapható meg:

$$\frac{7}{3}s^2+\frac{10}{3}s+\frac{7}{3}=\frac{7}{3}\left(s+\frac{5}{7}\right)^2+\frac{8}{7}.$$

A legkisebb minimum tehát $\frac{8}{7}$, amit akkor kapunk, ha $s=-\frac{5}{7}$. Ebben az esetben $t=\frac{s+2}{3}=\frac{3}{7}$.

Az $f(s,t)$ legkisebb értéke tehát $\frac{8}{7}$, amit a változók $t=\frac{3}{7}$, $s=-\frac{5}{7}$ értekeire vesz föl.

Barcza Zsófia (Bonyhád, Petőfi Sándor Evangélikus Gimnázium, 9. évf.)

Megjegyzések. 1. Hasonlóan jutunk eredményre, ha előbb az s, majd a t szerint alakítunk teljes négyzetté. Ekkor az

$$f(s,t)=3\left(s-\frac{2}{3}t+1\right)^2+\frac{14}{3}\left(t-\frac{3}{7}\right)^2+\frac{8}{7}$$

alakot kapjuk, ahonnan szintén látható, hogy a minimum értéke $\frac{8}{7}$, amit akkor vesz föl, ha $t-\frac{3}{7}=s-\frac{2}{3}t=0$, azaz $t=\frac{3}{7}$ és $s=-\frac{5}{7}$.

2. Az $f(s,t)=6\left(t-\frac{s+2}{3}\right)^2+\frac{7}{3}\left(s+\frac{5}{7}\right)^2+\frac{8}{7}$ alakból is látható, hogy az (s,t) koordinátarendszerben $f(s,t)=c$ egy ellipszis egyenlete, ha $c>\frac{8}{7}$. Ha $c=\frac{8}{7}$, akkor az ellipszis egyetlen ponttá zsugorodik, ennek a koordinátái a minimumot szolgáltató értékek: $t=\frac{3}{7}$ és $s=-\frac{5}{7}$. Eredményünkből az is adódik, hogy ha $c<\frac{8}{7}$, akkor nincs olyan pont, melynek (s,t) koordinátáira $f(s,t)=c$ teljesülne.