I. megoldás. Ha P a négyzet AB vagy CD oldalegyenesén van, akkor a feltétel nyilván nem teljesül. Ha tehát $\sin APB\sphericalangle = \sin DPC\sphericalangle$, akkor létezik az A, B, P pontokon átmenő k_1 és a C, D, P pontokon átmenő k_2 kör. Ezekben a körökben AB és CD egyenlő vagy kiegészítő kerületi szögekkel szemközti húrok. Mivel a négyzet oldalai, ezért egyenlők, így a k_1 és k_2 körök egybevágók.

Megfordítva, ha P két egybevágó kör közös pontja, amelyek egyike A-n és B-n, a másik pedig C-n és D-n megy át, akkor az $APB\sphericalangle$ és $DPC\sphericalangle$ egyenlők, vagy pedig 180°-ra egészítik ki egymást, tehát $\sin APB\sphericalangle = \sin DPC\sphericalangle$. A szóban forgó mértani hely tehát az AB-n illetve a CD-n átmenő egybevágó körpárok közös pontjaiként adódik.

Tekintsünk tehát egy tetszőleges k_1 kört, amelyik átmegy az A és B pontokon. A C és D pontokon ekkor két olyan kör megy át, amelyik egybevágó a k_1-gyel: a k_1 tükörképe az AD és BC f felező merőlegesére, illetve az a kör, amelyet úgy kapunk, ha k_1-et eltoljuk az $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ vektorral. (Az AB szakaszt mindkét transzformáció a CD-be viszi.) Jelöljük a tükrözéssel kapott kört k_{21}-gyel, az eltoltat pedig k_{22}-vel. (Ha k_1 éppen az AB átmérőjű kör, akkor $k_{21} = k_{22}$.)

1. eset: k_1 és k_{21} közös pontjai.

Ha a két kör, k_1 és k_{21} nem esik egybe, akkor legfeljebb két közös pontjuk van. Ezek – ha létrejönnek –rajta vannak a tükrözés tengelyén. Így az f egyenes pontjait kapjuk, és ennek nyilván minden pontja előáll az f-re tükrös ABP illetve DCP pontokon átmenő egybevágó körök metszéspontjaként. (Ilyen P pontokra egyébként az APB és a DPC szögtartományok is tükrösek az f-re, így a szinuszuk egyenlő.) (1.a., 1.b. ábrák.)

1.a. ábra *1.b. ábra*

Ha k_1 és k_{21} azonosak, akkor $k_1 = k_{21}$ a négyzet körülírt köre. A fentiek szerint ennek a körnek a négyzet csúcsaitól különböző valamennyi pontja a mértani helyhez tartozik (2.a., 2.b. ábrák). A megfordítás most is közvetlenül leolvasható: a P bármely helyzetében negyed- vagy háromnegyed körívnyi kerületi szögek adódnak. Ha P az $\overset{\frown}{AB}$ vagy a $\overset{\frown}{CD}$ íven van, akkor az egyik szög 45°, a másik pedig 135°, míg a $\overset{\frown}{BC}$ vagy a $\overset{\frown}{DA}$ íven mindkét szög 45°-os.

2.a. ábra

2.b. ábra

2. eset: k_1 és k_{22} közös pontjai.

3.a. ábra *3.b. ábra*

A két kör és a négyzet közös szimmetriatengelye az AB felező merőlegese, így a létrejövő két metszéspont közül azt vizsgáljuk, amelyik a B, C pontokkal azonos félsíkban van (3.a., 3.b. ábrák). A k_{22} kört a k_1 eltoltjaként kaptuk, így ha a P-n keresztül párhuzamost húzunk BC-vel, akkor ez a k_1 kört abban a Q pontban metszi, amelyre $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{BC}$, az eltolás során éppen a Q pont képe a P. Az eltolás így a k_1 kör $\overset{\frown}{QB}$ ívét a k_{22} kör $\overset{\frown}{PC}$ ívébe viszi. Mivel pedig egybevágó körökben egyenlő ívekhez egyenlő kerületi szögek tartoznak, a k_{22}-beli $PDC\sphericalangle$ és a k_1-beli $QPB\sphericalangle$ egyenlő.

A $PQBC$ paralelogrammában pedig $QPB\sphericalangle = CBP\sphericalangle$. A két eredményt egybevetve

$$PDC\sphericalangle = CBP\sphericalangle,$$

a P pont rajta van a négyzet AC átlóján. (A körök másik metszéspontja az AC átló centrálisra vonatkozó tükörképén, a BD átlón van.)

4.a. ábra

4.b. ábra

Megfordítva, az átlók minden pontjára fennáll a szóban forgó egyenlőség. Ha P az AC átló pontja (4.a., 4.b. ábrák), akkor $DPC\sphericalangle = CPB\sphericalangle$. Mivel A, C és P egy egyenesen vannak, külső P pontra $CPB\sphericalangle = APB\sphericalangle$ (4.a. ábra), belső P pontra pedig $CPB\sphericalangle = 180^\circ - APB\sphericalangle$.

5. ábra

Ezzel minden esetet megvizsgáltunk, a mértani hely a négyzet f szimmetriatengelye, valamint a körülírt kör, továbbá a két átló egyenese a négyzet csúcsainak a kivételével (5. ábra).

Megjegyzés. Az egybevágó k_1 és k_{21} illetve k_1 és k_{22} körök metszéspontjainak a vizsgálata koordinátageometriai eszközökkel is történhet. Így okoskodott *Ta Vinh Tong,* a budapesti Fazekas Mihály Gimnázium 11. osztályos tanulója. A most következő megoldás teljes egészében koordinátageometriai eszközökkel oldja meg a feladatot.

II. megoldás. Válasszuk a négyzet oldalát 2 egységnyinek és helyezzük el egy derékszögű koordinátarendszerben úgy, hogy a csúcsok koordinátái legyenek $A(-1;-1)$, $B(1;-1)$, $C(1;1)$, $D(-1;1)$.

Ha $P(x,y)$ tetszőleges pont, akkor a P távolsága az AB egyenestől $|y+1|$, a CD egyenestől pedig $|y-1|$. Ha P különbözik az A és B pontoktól, akkor az esetleg elfajuló ABP háromszög területét kétféleképpen fölírva a távolságformula felhasználásával $\sin APB\sphericalangle$ kifejezhető:

$$2T_{APB} = AP \cdot BP \cdot \sin APB\sphericalangle = AB \cdot |y+1|,$$
$$\sin APB = \frac{2|y+1|}{\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}\cdot\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}}$$

és ugyanígy

$$\sin DPC = \frac{2|y-1|}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}\cdot\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}}$$

Ha P különbözik a négyzet csúcsaitól – ellenkező esetben a szögek valamelyike nem értelmezhető – akkor a fenti kifejezésekben a nevezők értéke nem nulla. A mértani hely egyenlete így

$$(1)\qquad \frac{2|y+1|}{\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}\cdot\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}} = \frac{2|y-1|}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}\cdot\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}}.$$

Emeljük négyzetre (1) két oldalát. Ilyen lépéssel a megoldáshalmaz általában bővül, most azonban nem ez a helyzet. A négyzetre emeléssel kapott egyenlet ugyanis most olyan P pontok megjelenését eredményezi, amelyekre

$$\sin APB\sphericalangle = -\sin DPC\sphericalangle.$$

Ez azt jelenti, hogy a feladat természetes értelmezése szerint konvex APB és DPC szögtartományok mellett az őket 360°-ra kiegészítő konkáv szögtartományok is megjelennek. Ezek körében a $|\sin APB\sphericalangle| = |\sin DPC\sphericalangle|$ feltétel ekvivalens a megfelelő konvex szögekre vonatkozó $\sin APB\sphericalangle = \sin DPC\sphericalangle$ feltétellel.

Az $(x+1)^2 = a$, $(x-1)^2 = b$, $(y+1)^2 = c$, $(y-1)^2 = d$ mennyiségek bevezetésével (1) a négyzetre emelés után így alakul:

$$\frac{4c}{(a+c)(b+c)} = \frac{4d}{(a+d)(b+d)}.$$

Innen

$$c(a+d)(b+d) = d(a+c)(b+c).$$

Az egyenlőség két oldala a változók $c \leftrightarrow d$ cseréjére fölcserélődik, ami azt jelenti, hogy a két oldal különbségéből $(c-d)$ kiemelhető. Valóban beszorzás és rendezés után

$$\mathbf{c}ab - \mathbf{d}ab + \mathbf{c}ad - \mathbf{d}ac + \mathbf{c}db - \mathbf{d}cb + \mathbf{c}d^2 - \mathbf{d}c^2 = (c-d)(ab-cd) = 0.$$

Visszahelyettesítve:

$$c-d = (y+1)^2 - (y-1)^2 = 4y$$
$$ab-cd = (x^2-1)^2 - (y^2-1)^2 = (x^2-y^2)(x^2+y^2-2),$$

a négyzet csúcsaival bővített ponthalmaz egyenlete:

$$y(x^2-y^2)(x^2+y^2-2) = 0.$$

$y=0$ az x tengely egyenlete, ez a négyzet AD-t és BC-t felező szimmetriatengelye. $x^2-y^2=0$ metsző egyenespár, a négyzet két átlójának az egyenlete, végül $x^2+y^2-2=0$ a négyzet körülírt körének az egyenlete.

A bizonyításból következik, hogy a négyzet csúcsaitól eltekintve valamennyi pontra teljesül a $\sin APB\sphericalangle = \sin DPC\sphericalangle$ feltétel. Ez egyébként közvetlenül is könnyen igazolható a talált pontokra.

A keresett mértani hely így a négyzet BC-re merőleges szimmetriatengelye, a négyzet átlóegyenesei és a négyzet körülírt köre a négy csúcs, A, B, C, D kivételével (5. ábra).

Lovrics Klára (Budapest, Eötvös József Gimnázium, 12. o.t.)