Jelöljük a félkör középpontját O-val, sugarát r-rel, az érintési pontot pedig T-vel. Két esetet különböztetünk meg.

I. eset: $AE < AF$ (1. ábra). Mivel

$$OBT\sphericalangle = 30^\circ \quad \text{és} \quad OTB\sphericalangle = 90^\circ,$$

azért $OB = 2OT = 2r$, azaz $FB = OB - OF = r$.

1. ábra *2. ábra* *3. ábra*

Tudjuk továbbá, hogy

$$r=\frac{EF}{2}=\frac{1}{2}(AB-AE-BF)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right).$$

Ekkor tehát

$$\frac{1}{m}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right),\quad \text{azaz}\quad nm-m-3n=0.$$

Ezt átalakítva $(n-1)(m-3)=3$ adódik. Mivel n és m egészek, a 3 pedig csak négyféleképpen írható fel két egész szám szorzataként, azért csak az alábbi táblázatban szereplő értékek jöhetnek szóba:

$n-1$	1	3	-1	-3
$m-3$	3	1	-3	-1
n	2	4	0	-2
m	6	4	0	2

Ezek közül csak az $m=6$, $n=2$ és az $m=n=4$ párok esetén lesz m is és n is pozitív, ezek adják a feladat megoldását.

Ha az AC átló is érinti a félkört, mégpedig az L pontban, akkor az AOL háromszög egyenlő szárú és derékszögű (2. ábra), ezért $AO=r\cdot\sqrt{2}$. De $AO=AE+EO$ és $AE=\frac{1}{n}$, $EO=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)=r$ racionális számok, $r\cdot\sqrt{2}$ pedig irracionális. Ezért AC egyik esetben sem érinti a félkört.

II. eset: $AE>AF$ (3. ábra). Az előző esethez hasonló módon kapjuk, hogy $BE=r$,

$$r=\frac{EF}{2}=\frac{1}{2}(AE+BF-AB)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}-1\right)$$

és $BE=AB-AE=1-\frac{1}{n}$. Tehát $1-\frac{1}{n}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}-1\right)$, azaz $3mn-3m-n=0$. Ezt átalakítva $(3m-1)(n-1)=1$ adódik, azaz $3m-1=\pm1$, amiből következik, hogy ebben az esetben nincs pozitív egészekből álló megoldás.

Tehát m és n kétféle értéket vehet fel: vagy $m=6$ és $n=2$, vagy pedig $m=n=4$. Az AC átló egyik esetben sem érinti a félkört.

Dömötör Csilla (Győr, Révai M. Gimn., 11. évf.)