I. Megoldás. (*Gerencsér Balázs* megoldása.) Tekintsünk egy olyan rácsháromszöget, melynek körülírt körének középpontja is rácspont. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az egyik csúcspont (A) az origó. Legyenek a másik két csúcs koordinátái $B=(a,b)$ és $C=(c,d)$, a körülírt kör középpontjáé pedig $O=(x,y)$.

Az OA és OB szakaszok egyenlőségéből a Pitagorasz tétel alapján nyerjük, hogy $x^2+y^2=(a-x)^2+(b-y)^2$, ahonnan leolvasható, hogy a^2+b^2, és így $a+b$ és $a-b$ is páros számok. Hasonlóképpen kapjuk, hogy $c+d$ és $c-d$ is páros számok.

Tekintsük most az $A_1B_1C_1$ rácsháromszöget, ahol

$$A_1=A, \quad B_1=\left(\frac{a+b}{2},\frac{a-b}{2}\right) \quad \text{és} \quad C_1=\left(\frac{c+d}{2},\frac{c-d}{2}\right).$$

Ebben a háromszögben

$$\overline{A_1B_1}^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{2}=\frac{\overline{AB}^2}{2},$$
$$\overline{A_1C_1}^2=\left(\frac{c+d}{2}\right)^2+\left(\frac{c-d}{2}\right)^2=\frac{c^2+d^2}{2}=\frac{\overline{AC}^2}{2}$$

és

$$\overline{B_1C_1}^2=\left(\frac{a+b-c-d}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b-c+d}{2}\right)^2=\frac{(a-c)^2+(b-d)^2}{2}=\frac{\overline{BC}^2}{2}.$$

Az $A_1B_1C_1$ háromszög oldalai tehát rendre megegyeznek az ABC háromszög megfelelő oldalainak $\sqrt{2}$-ed részével, a két háromszög ennek megfelelően hasonló. Ilyen módon találtunk egy, az ABC háromszöghöz hasonló, annál kisebb területű rácsháromszöget. Ez bizonyítja az állítást.

II. Megoldás. Tegyük fel, hogy egy H rácsháromszög körülírt körének O középpontja is rácspont. Legyenek az egyik oldalvektor koordinátái (x,y), az O pontból a szóban forgó oldal csúcsaiba mutató vektorok koordinátái pedig (a,b), illetve (c,d). Ekkor a, b, c, d, x, y egész számok, melyekre a Pitagorasz tétel alapján

$$x^2+y^2=(a-c)^2+(b-d)^2=(a^2+b^2)+(c^2+d^2)-2(ac+bd)$$

teljesül. Mivel $a^2+b^2=c^2+d^2$ (a körülírt kör sugarának négyzete), x^2+y^2, és így $(x+y)^2$ is páros szám. Következésképpen $x+y$ és $x-y$ is páros számok.

Ha az (x,y) vektort az origó körül 45°-os szöggel elforgatjuk pozitív irányba, akkor az $\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}},\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)$ vektort kapjuk, ezt $\frac{1}{\sqrt{2}}$ arányban nagyítva pedig az $\left(\frac{x-y}{2},\frac{x+y}{2}\right)$ vektorhoz jutunk, melynek mindkét koordinátája egész szám.

Megállapíthatjuk tehát, hogy H-t bármely csúcsa körüli 45°-os szöggel történő $\frac{1}{\sqrt{2}}$ arányú forgatva nyújtás egy hozzá hasonló, ám nála kisebb rácsháromszögbe viszi. Ez bizonyítja az állítást.

Megjegyzés. Bontsunk fel egy húrsokszöget valamely csúcsából induló átlóinak segítségével háromszögekre. Mivel ezen háromszögek körülírt köreinek ugyanaz a középpontja, ez a megoldás mutatja azt is, hogy a feladat állítása háromszög helyett tetszőleges húrsokszögre is igaz.