I. Megoldás. Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz, vagyis az $a_i + b_i$, $a_i + c_i$, $b_i + c_i$ számok között legfeljebb k különböző szám található, ezek halmazát jelölje T. Világos, hogy minden $1 \le i \le n$ esetén az $a_i + b_i$, $a_i + c_i$, $b_i + c_i$ számok páronként különbözők, vagyis T-nek egy 3-elemű részhalmazát alkotják. Továbbá, ha $a_i + b_i = x$, $a_i + c_i = y$ és $b_i + c_i = z$, akkor $a_i = (x + y - z)/2$, $b_i = (x + z - y)/2$ és $c_i = (y + z - x)/2$. Az $\{x, y, z\}$ halmaz ismeretében az $\{a_i, b_i, c_i\}$ halmaz tehát egyértelműen meghatározható. Minthogy

$$\binom{|T|}{3} \le \binom{k}{3} < n,$$

léteznek $1 \le i < j \le n$ indexek úgy, hogy $\{a_i, b_i, c_i\} = \{a_j, b_j, c_j\}$, ami azonban lehetetlen.

A második állítás bizonyításához tekintsük a $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_k\}$ halmazt, ahol $t_i = 4^i$. Legyen $n = \binom{k}{3}$, és jelölje $T_1, T_2, \ldots, T_n$ a T halmaz 3-elemű részhalmazait. Ha $T_i = \{4^u, 4^v, 4^w\}$, ahol $1 \le u < v < w \le k$ egész számok, akkor legyen $a_i = (4^u + 4^v - 4^w)/2$, $b_i = (4^u + 4^w - 4^v)/2$ és $c_i = (4^v + 4^w - 4^u)/2$, ekkor nyilván $a_i + b_i, a_i + c_i, b_i + c_i \in T$. Ezért elegendő megmutatni, hogy az a_i, b_i, c_i $(1 \le i \le n)$ számok mind különbözők.

$a_i = b_j$ vagy $a_i = c_j$ semmilyen i, j esetén nem állhat fenn, hiszen az a_i számok mind negatívak, míg a b_j, c_j számok mind pozitívak. Az sem lehet, hogy $b_i = c_j$, hiszen a b_i számok mindegyike valamelyik $(2^{2s-2}, 2^{2s-1})$ alakú intervallumba esik, míg a c_i számok mindegyike valamelyik $(2^{2s-1}, 2^{2s})$ alakú intervallumba esik, ahol $3 \le s \le k$ egész szám.

Legyen most $T_i = \{4^u, 4^v, 4^w\}$ és $T_j = \{4^x, 4^y, 4^z\}$, ahol $1 \le u < v < w \le k$ és $1 \le x < y < z \le k$ egész számok. Tegyük fel, hogy $c_i = c_j$, ekkor

$$4^v + 4^w - 4^u = 4^y + 4^z - 4^x.$$

Mivel $4^w < 4^v + 4^w - 4^u < 4^{w+1}$ és $4^z < 4^y + 4^z - 4^x < 4^{z+1}$, ez csak úgy lehet, ha $w = z$, következésképpen $4^v - 4^u = 4^y - 4^x$. Itt $4^{v-1} < 4^v - 4^u < 4^v$ és $4^{y-1} < 4^y - 4^x < 4^y$, ezért az egyenlőség csak úgy állhat fenn, ha $v = y$, és ekkor szükségképpen $u = x$, $i = j$ is igaz. A c_i számok tehát mind különbözők.

Ugyanilyen gondolatmenettel megállapíthatjuk azt is, hogy mind az a_i számok, mind a b_i számok különbözők, amivel a bizonyítás végére értünk.

II. Megoldás. A feladat első részére mutatunk egy másik indoklást, ez *Kiss Demeter*től származik. Tegyük fel ismét, hogy az állítással ellentétben a $3n$ összeg között legfeljebb k különböző szám található. Ekkor ezek közül valamelyik, jelöljük ezt a-val, legalább $\frac{3n}{k} > \binom{k-1}{2}$ alkalommal fordul elő. Ha valamilyen i-re az $a_i + b_i$, $b_i + c_i$ és $a_i + c_i$ összegek közül kettő is egyenlő lenne a-val, akkor az a_i, b_i, c_i számok között lenne két megegyező. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük tehát, hogy minden $1 \le i \le \binom{k-1}{2} + 1$ esetén az $a_i + b_i$, $b_i + c_i$ és $a_i + c_i$ összegek közül pontosan egy lesz a-val egyenlő. Az ezen összegek közül fennmaradó $2\left(\binom{k-1}{2} + 1\right)$ összeg most már csak $k - 1$ különböző értéket vehet fel, van tehát egy olyan érték, jelöljük ezt b-vel, amely legalább

$$2\left(\binom{k-1}{2} + 1\right) \Big/ (k-1) > k - 2$$

alkalommal fordul elő. Az előző okoskodáshoz hasonlóan tehát feltehetjük, hogy minden $1 \le i \le k-1$ esetén az $a_i + b_i$, $b_i + c_i$ és $a_i + c_i$ összegek közül az egyik a-val, egy másik pedig b-vel egyenlő. A még megmaradó $k - 1$ összeg pedig már csak legfeljebb $k - 2$ különböző értéket vehet fel, lesz tehát köztük kettő, amelyik megegyezik. Ekkor azonban az ezekhez tartozó a_i, b_i, c_i számhármasok is megegyeznek, mely ellentmondás bizonyítja az állítást.

A továbbiakban a feladat második részére mutatunk több megoldást.

III. Megoldás. Tekintsük a $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_k\}$ halmazt, ahol $t_i = 3^i$. Legyen $\{x, y, z\}$ és $\{u, v, w\}$ az $\{1, 2, \ldots k\}$ halmaz két 3-elemű részhalmaza. Az I. megoldáshoz hasonlóan, annyit kell csak megmutatnunk, hogy ha

$$\frac{3^x + 3^y - 3^z}{2} = \frac{3^u + 3^v - 3^w}{2},$$

akkor a két részhalmaz szükségképpen megegyezik, és $z = w$. Valóban, ekkor $3^x + 3^y + 3^w = 3^u + 3^v + 3^z = A$. Ha az A számot hármas számrendszerben írjuk fel, akkor annak 0-tól különböző számjegyei között vagy három 1-es, vagy egy 1-es és egy 2-es számjegy szerepel, hiszen $x = y = w$ nem lehetséges. A felírás egyértelműsége miatt az első esetben $\{x, y, w\}$ és $\{u, v, z\}$ az $\{1, 2, \ldots k\}$ halmaznak ugyanaz a 3-elemű részhalmaza. Mivel $x, y \ne z$, ebből $w = z$, majd $\{x, y\} = \{u, v\}$ is következik, ahogyan azt bizonyítani kívántuk. A második esetben azt kapnánk, hogy $\{x, y, w\}$ és $\{u, v, z\}$ az $\{1, 2, \ldots k\}$ halmaznak ugyanaz a 2-elemű részhalmaza. Mivel $x \ne y$, ez meg kellene egyezzen az $\{x, y\}$ halmazzal, ahonnan $z \in \{x, y\}$ következne, ami nem lehetséges.

IV. Megoldás. Ahogyan azt az eddigi megoldások is sugallják, elegendő azt megmutatni, hogy minden k pozitív egész esetén létezik egy olyan $T_k = \{t_1, t_2, \ldots, t_k\}$ halmaz, melyre $t_x + t_y + t_z = t_u + t_v + t_w$ akkor és csak akkor teljesül, ha az x, y, z számok valamilyen sorrendben megegyeznek az u, v, w számokkal. Valóban, ekkor nem nehéz megmutatni, hogy a $(t_x + t_y - t_z)/2$ alakban felírható $3\binom{k}{3}$ szám (ahol $\{x, y, z\}$ az $\{1, 2, \dots k\}$ halmaz tetszőleges 3-elemű részhalmaza) mind különböző.

Ha $k = 1$ akkor a $t_1 = 1$ választás nyilván megfelelő. Elegendő megmutatni azt, hogy létezik olyan végtelen $t_1, t_2, \dots, t_i, \dots$ sorozat, hogy minden $i \geq 2$ esetén t_i nem írható fel $r_1 t_1 + \dots + r_{i-1} t_{i-1}$ alakban, ahol $r_1, \dots r_{i-1}$ racionális számok. Tegyük fel ugyanis, hogy létezik ilyen sorozat, tekintsük a T_k halmazt, és tegyük fel, hogy $t_x + t_y + t_z = t_u + t_v + t_w$ teljesül valamilyen $1 \leq x, y, z, u, v, w \leq k$ esetén. Legyen i az x, y, z, u, v, w indexek között előforduló legnagyobb szám. Ha most t_i nem ugyanannyiszor szerepelne az egyenlőség két oldalán, akkor átrendezés után egy $t_i = r_1 t_1 + \dots + r_{i-1} t_{i-1}$ alakú egyenlőséghez jutnánk. Ezért i ugyanannyiszor szerepel az x, y, z számok között, mint az u, v, w számok között. Mindkét oldalról elhagyva a t_i-vel egyenlő tagokat, és az előbbi lépést megismételve végül azt kapjuk, hogy az x, y, z számok valamilyen sorrendben valóban megegyeznek az u, v, w számokkal.

Tegyük fel tehát, hogy $k > 1$, és a $t_1, \dots, t_{k-1}$ számokat már meghatároztuk a fenti kívánalomnak megfelelően. Ekkor az $r_1 t_1 + \dots + r_{k-1} t_{k-1}$ alakban felírható számok halmaza megszámlálhatóan végtelen, míg az összes valós szám halmaza nem az, létezik tehát olyan t_k valós szám, mely nem írható fel $r_1 t_1 + \dots + r_{k-1} t_{k-1}$ alakban. Ezért a kívánt tulajdonságú sorozat létezése azonnal következik a teljes indukció elvéből.

Megjegyzések. 1. Az előző megoldásban nem konstruktív módon igazoltuk egy alkalmas $t_1, t_2, \dots, t_i, \dots$ sorozat létezését. Megmutatható, hogy például a $t_i = \sqrt{p_i}$ választással, ahol p_i az i-edik pozitív prímszámot jelöli, megfelelő sorozathoz jutunk. Ennek bizonyítása azonban már túl messzire vezetne.

2. Ahogyan azt *Kocsis Albert Tihamér* észrevette, a feladat átalánosítható a következő módon. Legyenek $k \geq t \geq 3$ egész számok, $n > \binom{k}{t}$. Ha $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{it}$ $(1 \leq i \leq n)$ tn különböző valós szám, akkor a $\sum_{i=1}^{t} a_i - a_k$ $(1 \leq i \leq n,\ 1 \leq k \leq t)$ számok között legalább $k + 1$ különböző szám található, $n = \binom{k}{t}$ esetén pedig ez nem mindig van így. Ennek igazolását az olvasó könnyen elvégezheti, nincsen szükség hozzá alapvetően új gondolatra.

3. Merőben más a helyzet, ha kéttagú összegeknél maradunk. Világos, hogy ha $k \geq 3$ egész szám, $n > \binom{k}{3}$, és a_i, b_i, c_i, d_i $(1 \leq i \leq n)$ $4n$ különböző valós szám, akkor az $a_i + b_i$, $a_i + c_i$, $a_i + d_i$, $b_i + c_i$, $b_i + d_i$, $c_i + d_i$ összegek között legalább $k + 1$ különböző szám található. Meglepő módon ez az állítás lényegesen nem javítható. Érdemes elgondolkozni a következő feladaton: minden $k \geq 3$ egész számra létezik $4\binom{k}{3}$ különböző valós szám, a_i, b_i, c_i, d_i $\left(1 \leq i \leq \binom{k}{3}\right)$ úgy, hogy az $a_i + b_i$, $a_i + c_i$, $a_i + d_i$, $b_i + c_i$, $b_i + d_i$, $c_i + d_i$ összegek között legfeljebb $2k$ különböző szám található.