I. Megoldás. Ha $n = 1$, akkor az állítás nyilvánvaló, $n > 1$ esetén pedig ekvivalens azzal, hogy található $2n$ pont, melyek konvex burkának legalább 4 csúcsa van. Ha találunk $m \geq 2n$ pontot, melyek konvex burkának legalább 4 csúcsa van, azok közül már könnyűszerrel elhagyhatunk $m - 2n$ pontot úgy, hogy a megmaradók konvex burkának még mindig legalább 4 csúcsa legyen.

Ha a pontok $\mathcal{P}$ halmazának konvex burka nem háromszög, akkor a fenti megjegyzés értelmében készen is vagyunk. Feltehető tehát, hogy $\mathcal{P}$ konvex burka egy $A_1B_1C_1$ háromszög. Tegyük fel, hogy valamely $i < n$ esetén az $A_1, \ldots, A_i$ pontokat már definiáltuk úgy, hogy minden $j \leq i$ esetén a $\mathcal{P} \setminus \{A_1, \ldots, A_{j-1}\}$ ponthalmaz konvex burka éppen az $A_jB_1C_1$ háromszög. A $\mathcal{P} \setminus \{A_1, \ldots, A_i\}$ halmaznak legalább $2n$ pontja van, ezért az előbbi megállapításunkhoz hasonlóan feltehetjük, hogy e halmaz konvex burka is egy háromszög. Ennek két csúcsa nyilván B_1 és C_1, a harmadikat jelöljük A_{i+1}-gyel.

Megállapíthatjuk tehát, hogy ha nem található a pontok között $2n$ olyan, melyek konvex burka nem háromszög, akkor létezik egy $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pontsorozat $\mathcal{P}$-ben úgy, hogy minden $i \leq n$ esetén $\mathcal{P} \setminus \{A_1, \ldots, A_{i-1}\}$ konvex burka az $A_iB_1C_1$ háromszög. Hasonlóan készíthetjük el a $B_1, B_2, \ldots, B_n$ és $C_1, C_2, \ldots, C_n$ pontsorozatokat is. Az így kapott $3n$ pont között kell legyen kettő olyan, amelyik egybeesik. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $A_j = B_k$. Ekkor a

$$\mathcal{P} \setminus \{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \setminus \{B_1, B_2, \ldots, B_n\} \setminus \{C_1\}$$

ponthalmaznak legalább $n - 1 \geq 1$ pontja van, és mindegyik belső pontja mind az $A_jB_1C_1$, mind a $B_kA_1C_1$ háromszögnek. Ez azonban lehetetlen, hiszen a két háromszögnek nincs közös belső pontja. Ez az ellentmondás igazolja az állítást.

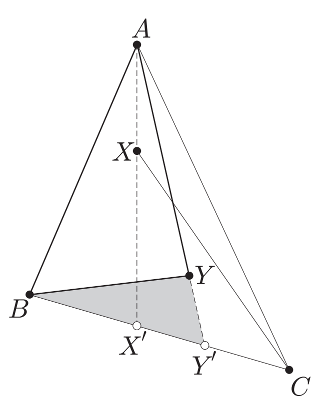
Megjegyzések. 1. Nem nehéz megmutatni, hogy a feladatban $3n - 1$ helyébe $3n - 2$ már nem írható. Valóban, legyen $A_1B_1C_1$ egy szabályos háromszög, melynek középpontja O, és legyen A, B, C rendre az OA_1, OB_1 és OC_1 szakaszok felezőpontja. Legyen k_A, k_B és k_C egy-egy R sugarú körív, mely az A_1 és A, B_1 és B, illetve C_1 és C pontokat köti össze. Vegyük fel a k_A, k_B, k_C íveken az $A_2, \ldots, A_n$, $B_2, \ldots, B_{n-1}$ és $C_2, \ldots, C_{n-1}$ pontokat. Ha $n \geq 2$ és R elég nagy, akkor a $\mathcal{P} = \{A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_{n-1}, C_1, \ldots, C_{n-1}\}$ $3n-2$ elemű ponthalmazból nem választható ki $2n$ pont, melyek konvex burka nem háromszög. Ha ugyanis R elég nagy, akkor minden A_iA_j egyenes elválasztja egymástól a B_k és C_ℓ pontokat. Ha tehát $\mathcal{P}$ egy részhalmaza konvex burkának csúcsa az A_i és A_j pont is, akkor az $A_1, \ldots, A_n$ pontokon kívül legfeljebb $n-1$ további pontot tartalmazhat, tehát legfeljebb $2n - 1$ pontja lehet. Hasonlóképpen okoskodhatunk akkor is, ha a konvex burok a B_i vagy a C_i pontok közül tartalmaz legalább kettőt csúcsként. Következésképpen $\mathcal{P}$ minden $2n$ elemű részhalmazának konvex burka mind az A_i, mind a B_i és úgyszintén a C_i pontok közül is csak egyet tartalmazhat csúcsként, és így szükségképpen háromszög lesz.

2. Jelölje $\lceil x \rceil$ az x valós szám fölső egész részét, vagyis az x-nél nem kisebb egész számok közül a legkisebbet. Megmutatható, hogy az alábbi erősebb állítás is igaz.

Tegyük fel, hogy $n \neq 3$, és adott a síkon $\lceil 3n/2 \rceil - 1$ pont, melyek közül semelyik három nem esik egy egyenesre. Ekkor található közöttük n pont, melyek konvex burka nem háromszög.

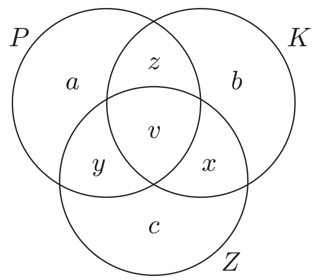
A következőkben erre az állításra adunk még két bizonyítást. Jegyezzük meg, hogy a feltételnek csak akkor van értelme, ha n pozitív egész szám, és hogy $n \leq 2$ esetén az állítás nyilván igaz. Ennek megfelelően a megoldások során feltesszük, hogy $n > 3$ egész számot jelöl. Páratlan n esetén a fenti konstrukció apró módosításával ellenőrizhetjük azt is, hogy ha a pontok száma $\lceil 3n/2 \rceil - 2$, akkor az állítás már nem marad igaz.

II. Megoldás. Tegyük fel, hogy a $\mathcal{P}$ legalább $\lceil 3n/2 \rceil - 1$ elemű általános helyzetű ponthalmaz nem tartalmaz n pontot, melyek konvex burka nem háromszög. Legyen $\mathcal{P}$ konvex burka az ABC háromszög, és legyen $A_1 = A$. Az első megoldásban ismertetett módon készítsük el az $A_1, A_2, \ldots, A_{\lceil n/2 \rceil}$ sorozatot úgy, hogy minden $i \leq \lceil n/2 \rceil$ esetén $\mathcal{P} \setminus \{A_1, \ldots, A_{i-1}\}$ konvex burka az A_iBC háromszög legyen.



Rendezzük sorba az $A_2, \ldots, A_{\lceil n/2 \rceil}$ pontokat az A-ból nézve pozitív irányban, és jelölje közülük a két szélsőt X és Y. Az AX és AY egyenesek BC szakasszal alkotott metszéspontját jelölje X' és Y'. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a B, X', Y', C pontok ebben a sorrendben követik egymást a BC egyenesen. A BCX és BCY háromszögek közül valamelyik tartalmazza a másikat. Ezek közül a kisebbik, melyet lefed a BYY' és CXX' háromszögek egyesítése, tartalmazza a $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \setminus \left\{A_1, A_2, \ldots, A_{\lceil n/2 \rceil}, B, C\right\}$ legalább $n - 3$ elemű ponthalmazt. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\mathcal{P}'$ pontjainak legalább a fele a BYY' háromszögbe esik (ábra). Válasszunk ki ezek közül $\lceil (n-3)/2 \rceil$ pontot, ezek halmazát jelölje $\mathcal{P}''$. Tekintsük végül a $\mathcal{Q} = \mathcal{P}'' \cup \{A_1, A_2, \ldots, A_{\lceil n/2 \rceil}, B\}$ halmazt. $\mathcal{Q}$-nak $\lceil (n-3)/2 \rceil + \lceil n/2 \rceil + 1 = n$ eleme van, és minden eleme az $AY'B$ háromszögbe, vagy annak határára esik. Ezért az A, Y, B pontok a $\mathcal{Q}$ halmaz konvex burkán helyezkednek el. A konvex buroknak tartalmaznia kell továbbá a $\mathcal{P}''$ halmaznak legalább egy pontját is, ami ellentmond az indirekt feltevésünknek.

III. Megoldás. (Ez a megoldás *Lippner Gábor*tól származik.) Akárcsak az első megoldásban, most is feltehetjük, hogy a pontok konvex burka egy ABC háromszög. Két olyan pontot, mely a háromszög belsejében fekszik, kössünk össze egy piros, kék vagy zöld színű szakasszal aszerint, hogy az általuk meghatározott egyenes a háromszög három oldala közül melyiket nem metszi: az AB, a BC vagy a CA oldalt. Jelölje rendre P, K és Z azon pontok halmazát, melyekből indul ki piros, kék, illetve zöld színű szakasz. Az $n \geq 4$ feltevés miatt az ABC háromszög belsejében legalább 2 pont helyezkedik el, és ezért a $P \cup K \cup Z$ halmaz megegyezik a háromszög belsejében lévő pontok halmazával, tehát $\lceil 3n/2 \rceil - 4$ eleme van. Megmutatjuk, hogy a P, K, Z halmazok valamelyikének az elemszáma legalább $n-2$. Ennek igazolásához készítsük el a halmazok Venn-diagrammját, ahol az egyes betűk a megfelelő részhalmazok elemszámát jelölik.



Ha mondjuk $a \neq 0$, akkor van olyan pont a háromszög belsejében, amelyet minden további ponttal piros színű szakasz köt össze, ekkor tehát

$$|P| = \lceil 3n/2 \rceil - 4 \geq n-2,$$

hiszen $n \geq 4$. Feltehetjük tehát, hogy $a = b = c = 0$. Ez azt jelenti, hogy $|P \cup K \cup Y| = x + y + y + v$. Ha most $|P| = y + z + v$, $|K| = z + x + v$ és $|Z| = x + y + v$ mindegyike kisebb lenne, mint $n-2$, akkor összegzés után a

$$3n - 8 \leq 2\big(\lceil 3n/2 \rceil - 4\big) = 2(x + y + z + v) \leq |P| + |K| + |Z| \leq 3(n-3) = 3n - 9$$

egyenlőtlenséghez jutnánk, ami lehetetlen.

Valóban igaz tehát, hogy valamelyik halmaz elemszáma legalább $n-2$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $|P| \geq n-2 \geq 2$. Tekintsük a $P' = P \cup \{A, B\}$ legalább n elemű halmazt, ennek konvex burka tartalmazza az A és B csúcsokat. Legyen $D \in P$, és tekintsük P-nek egy olyan E pontját, melyre a DE szakasz piros. Mivel a DE egyenes nem metszi az AB szakaszt, az E pont nem lehet az ABD háromszög belsejében. Ezért P' konvex burka nem lehet háromszög. Már csak annyit kell megjegyeznünk, hogy ekkor P'-ből kiválasztható egy $n \geq 4$ elemű részhalmaz, melynek konvex burka szintén nem háromszög.