

I. megoldás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy az a_1, a_2, \dots, a_{2k} számok páronként különböző maradékot adnak $(n+k)$ -val osztva. Tekintsük a következő $n+k$ különböző számot:

$$b_1 = a_1, \quad b_2 = a_1, \quad b_3 = a_1 + a_2 b_{3i+1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{2i} + a_{2i+1} \quad (0 < i < k), \quad b_{3i+2} = a_1 + a_2 + \dots + a_{2i} + a_{2i+1}$$

Ha ezek között van olyan, amelyik osztható $(n+k)$ -val, akkor már készen is vagyunk. Ellenkező esetben pedig van a számok között kettő, mondjuk b_s és b_t ($s < t$) amelyik ugyanolyan maradékot ad $(n+k)$ -val osztva. Ekkor $b_t - b_s$ nyilván osztható $(n+k)$ -val. Azt kell már csak észrevennünk, hogy ez a különbség felírható az a_1, a_2, \dots, a_n számok közül néhánynak az összegeként. Ha ugyanis ez nem így lenne, akkor valamilyen k -nál kisebb i -re $s = 3i+1$ és $t = 3i+2$, vagyis $b_t - b_s = a_{2i+2} - a_{2i+1}$ volna. Ez azonban feltételezésünk értelmében nem osztható $(n+k)$ -val.

II. megoldás. Ugyanehhez a végeredményhez egy kissé eltérő kiindulással is eljuthatunk.

Állítás. *Tetszőleges b_1, b_2, \dots, b_N egész számok esetén léteznek olyan $1 \leq i \leq j \leq N$ indexek, hogy $a b_i + b_{i+1} + \dots + b_j$ összeg osztható N -nel.*

Ez egyébként éppen a feladat állítása a $k = 0$ esetben. A bizonyításhoz tekintsük $t = 0, 1, \dots, N$ esetén az $s_t = b_1 + \dots + b_t$ összegeket, ahol $s_0 = 0$ az üres összeg. Az így felírt $N+1$ egész szám között biztosan van kettő, amelyik ugyanolyan maradékot ad N -nel osztva. Ha s_k és s_ℓ ($0 \leq k < \ell \leq N$) két ilyen összeg, akkor $s_\ell - s_k = b_{k+1} + b_{k+2} + \dots + b_\ell$ osztható N -nel.

A feladatot ezután a következő módon vezethetjük vissza erre a speciális esetre. Az első megoldáshoz hasonlóan, most is feltehetjük, hogy az a_1, a_2, \dots, a_{2k} számok páronként különböző maradékot adnak $(n+k)$ -val osztva. Tekintsük a

$$b_1 = a_1, \quad b_2 = a_2 - a_1, \quad b_3 = a_1, \quad b_4 = a_3, \quad b_5 = a_4 - a_3, \quad b_6 = a_3, \quad \dots, \quad b_{3k} = a_{2k-1}, \\ b_{3k+1} = a_{2k+1}, \quad b_{3k+2} = a_{2k+2}, \quad \dots, \quad b_{n+k} = a_n$$

számokat. Így éppen $N = n+k$ egész számot írtunk fel.

A fenti állítás értelmében léteznek olyan $1 \leq i \leq j \leq N$ indexek, hogy $S = b_i + b_{i+1} + \dots + b_j$ osztható N -nel. Elegendő azt megmutatni, hogy S felírható az a_1, a_2, \dots, a_n számok közül néhánynak az összegeként. Ez egészen nyilvánvaló akkor, ha $i \geq 3k+1$, ebben az esetben ugyanis

$$S = a_{i-k} + a_{i-k+1} + \dots + a_{j-k}.$$

Ha $i \leq 3k < j$, akkor legyen $i = 3s + q$, ahol $0 \leq s < k$ és $1 \leq q \leq 3$. Ekkor nyilván

$$S = A + a_{2s+3} + a_{2s+4} + \dots + a_{j-k},$$

ahol $A = a_{2s+1} + a_{2s+2}$, a_{2s+2} , vagy a_{2s+1} annak megfelelően, hogy q értéke 1, 2, vagy pedig 3.

Végül $j \leq 3k$ esetén legyen $i = 3s + q$, $j = 3t + r$, ahol $0 \leq s \leq t < k$ és $1 \leq q, r \leq 3$. Ekkor könnyen ellenőrizhető, hogy

$$S = A + a_{2s+3} + a_{2s+4} + \dots + a_{2t} + B,$$

ahol A -t ugyanúgy definiáljuk, mint az előző esetben, B értéke pedig a_{2t+1}, a_{2t+2} , vagy pedig e kettő összege aszerint, hogy $r = 1, 2$, vagy 3 , feltéve, hogy $s \neq t$. Ha $s = t$, akkor is könnyen látható, hogy S értéke $a_{2s+1} + a_{2s+2}, a_{2s+2}$, vagy a_{2s+1} . Kivételt képezne az az egyetlen esetet, amikor $s = t$ és $q = r = 2$. Ez azonban nem fordulhat elő, hiszen ekkor $S = a_{2s+2} - a_{2s+1}$ lenne, az a_1, a_2, \dots, a_{2k} számok közül viszont semelyik kettő különbsége nem osztható N -nel.

III. megoldás. (Kovács Erika Renáta megoldása.) Ismét tegyük fel, hogy az a_1, \dots, a_{2k} számok páronként különböző maradékot adnak $(n+k)$ -val osztva. Vezessük be az $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{2k}\}$ jelölést, és legyen $b_1 = a_1$. Ha valamilyen $1 < j \leq k+1$ esetén a b_1, b_2, \dots, b_{j-1} számokat már definiáltuk, akkor legyen b_j az A halmaznak egy olyan eleme, amelyik a $b_1, b_2, \dots, b_{j-1}, b_1 + b_2, b_1 + b_2 + b_3, \dots, b_1 + b_2 + \dots + b_{j-1}$ számok egyikével sem ad azonos maradékot $(n+k)$ -val osztva. Ilyen szám valóban létezik, hiszen ezekkel a feltételekkel az A halmaznak legfeljebb $(j-1) + (j-2) < 2k$ elemét zártuk ki.

Jelölje $b_{k+2}, b_{k+3}, \dots, b_{2k}$ az A halmaz fennmaradó elemeit valamilyen sorrendben, és tekintsük a következő $n+k$ számot:

$$s_i = b_1 + b_2 + \dots + b_i \quad (1 \leq i \leq 2k), \quad s_j = a_1 + a_2 + \dots + a_j \quad (2k < i \leq n), \quad s_{n+1} = b_2, s_{n+2} = b_3, \dots, s_{n+k}$$

Ha ezek közül valamelyik osztható $(n+k)$ -val, akkor készen is vagyunk, ellenkező esetben viszont közülük kettő azonos maradékot ad $(n+k)$ -val osztva, ezek különbsége tehát ismét csak osztható $(n+k)$ -val. Az nyilván nem lehetséges hogy mindkét szám az utolsó k darab közül kerüljön ki, hiszen ezek páronként különböző maradékkal rendelkeznek. Ha mindkét szám az első n szám között van, akkor különbségük éppen az a_i számok közül néhánynak az összege, ebben az esetben tehát megint csak célhoz értünk. Végül, ha a két szám közül az egyik s_i , ahol $1 \leq i \leq n$, a másik pedig s_{n+j} , $1 \leq j \leq k$, akkor a b_i számok megválasztása miatt $i > j$ kell, hogy teljesüljön. Ekkor azonban $s_{n+j} = b_{j+1}$ éppen az s_i egyik összeadandója, következésképpen az $(n+k)$ -val osztható $s_i - s_{n+j}$ szám most is felírható az a_i számok közül néhánynak az összegeként.

IV. megoldás. (Zábrádi Gergely ötlete.) Most egy indukciós bizonyítást mutatunk. Pontosabban az alábbi erősebb állítást fogjuk teljes indukcióval igazolni.

Állítás. Legyenek m, n pozitív egész számok. Ha az a_1, a_2, \dots, a_n egész számok legalább $2i$ különböző maradékot adnak m -mel osztva, akkor vagy van közöttük néhány, amelyek összege osztható m -mel, vagy képezhető belőlük legalább $n + i$ olyan összeg, amelyek páronként különböző maradékot adnak m -mel osztva.

Ebből az állításból $m = n + k$, $i = k$ választással az eredeti feladat megoldása azonnal leolvasható.

Ha $i = 0$, akkor egyszerűen tekintjük az $a_1, a_1 + a_2, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_n$ összegeket; ha ezek között van két olyan, amelyek azonos maradékot ad m -mel osztva, akkor különbségük, ami szintén néhány a_i összege, osztható m -mel.

Tegyük fel most egy pillanatra, hogy $i = 1$ esetén is igazoltuk már az állítást. Az indukciós lépéshez legyen $j \geq 1$ és tegyük fel azt is, hogy az állítás igazolást nyert már $i = j$ esetén is. Ebből $i = (j + 1)$ -re a következőképpen kaphatjuk meg az állítást. Legyenek a_1, a_2, \dots, a_n olyan egész számok, amelyek legalább $2j + 2$ különböző maradékot adnak m -mel osztva. Válasszunk ki közülük két különböző maradékot adót, és tekintsük az összes olyan a_i -t, amelyek ezek valamelyikével kongruens modulo m . Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy ezek éppen az $a_{t+1}, a_{t+2}, \dots, a_n$ számok. Az a_1, a_2, \dots, a_t számokról tudjuk azt, hogy legalább $2j$ különböző maradékot adnak m -mel osztva.

Tegyük fel, hogy az a_i számokból nem képezhető m -mel osztható összeg. Ekkor az indukciós feltevés és az $i = 1$ esetre vonatkozó feltevés értelmében az a_1, a_2, \dots, a_t számokból képezhető $t + j$ különböző maradékot adó összeg, az $a_{t+1}, a_{t+2}, \dots, a_n$ számokból pedig képezhető $n - t + 1$ különböző maradékot adó összeg. Jelölje ezeket rendre s_1, s_2, \dots, s_{t+j} , illetve $r_1, r_2, \dots, r_{n-t+1}$. Minden további nélkül feltehető az is, hogy $s_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_t$. Tekintsük most a következő $n + j + 1$ számot: $s_1, s_2, \dots, s_{t+j}, s_1 + r_1, s_1 + r_2, \dots, s_1 + r_{n-t+1}$, ezek bármelyike felírható az a_i számok közül néhánynak az összegeként. Tudjuk, hogy az első $t + j$ szám páronként inkongruens modulo m , és hasonlóképpen az utolsó $n - t + 1$ is az. Az sem lehet, hogy valamelyik s_b ugyanolyan maradékot ad m -mel osztva, mint $s_1 + r_c$, hiszen különbségük, $(s_1 - s_b) + r_c$ jól láthatóan néhány a_i összege. A felsorolt $n + j + 1$ szám tehát páronként inkongruens modulo m , és éppen ezt akartuk megmutatni.

Annyi van már csak hátra, hogy a fent kimondott állítást $i = 1$ esetén is igazoljuk. Tegyük fel tehát, hogy az a_1, a_2, \dots, a_n számok közül a_1 és a_2 különböző maradékot adnak m -mel osztva. Ha az $a_1, a_2, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_n$ számok között van kettő, ami ugyanazt a maradékot adja, akkor különbségük, ami nem más, mint néhány a_i összege, osztható lesz m -mel. Ellenkező esetben pedig máris találtunk $n + 1$ olyan összeget, ami mind különböző maradékot ad m -mel osztva.

Megjegyzések. 1. Ahogy azt Gyenes Zoltán és Kiss Gergely is megjegyzi, az első megoldásból (és az azzal lényegében megegyező másodikból is) világosan látszik, hogy nem kell megkövetelnünk $2k$ különböző maradék létezését: elegendő, ha az a_i számokból kiválasztható k olyan pár, hogy az azonos párban lévő számok különböző maradékot adnak $(n + k)$ -val osztva.

Ez megtehető már akkor is (hogyan?), ha csak $k + 1$ különböző maradék létezését követeljük meg (feltéve persze, hogy $2k \leq n$).

2. A KöMaL 2000. decemberi számának A. 252. feladata szerint a $2k \leq n$ feltételre valójában nincs is szükség: a feladatban megfogalmazott állítás igazolásához elég annyit feltenni, ahogy az a_1, a_2, \dots, a_n számok legalább $k + 1$ különböző maradékot adnak $(n + k)$ -val osztva. Az alábbiakban erre mutatunk két különböző bizonyítást.

3. Megjegyezzük még, hogy Szemerédi Endre egy nehéz eredményére támaszkodva ez a feltétel is lényegesen gyengíthető: ha k értéke n -hez képest „elég nagy”, akkor elegendő annyit feltenni, hogy az a_i számok több, mint $c\sqrt{k}$ különböző maradékot adnak $(n + k)$ -val osztva.

V. megoldás. (Csikvári Péter megoldásából.) Ha $k = 0$, akkor a feltétel semmitmondó, és a bizonyítandó állítás következik a II. megoldás elején kimondott egyszerű állításból. A továbbiakban legyen tehát $k > 0$.

Tegyük fel, hogy az a_1, a_2, \dots, a_{k+1} számok különböző maradékot adnak $(n + k)$ -val osztva. Legyen $s = a_1 + a_2 + \dots + a_{k+1}$, és tekintsük $1 \leq i \leq k + 1$ esetén az a_i és $b_i = s - a_i$ számokat, valamint $1 \leq j \leq n - k$ esetén a $c_j = a_1 + a_2 + \dots + a_{k+j}$ számokat, ez összesen $n + k + 2$ egész szám. Vizsgáljuk meg, hogyan adhat ezek közül kettő ugyanolyan maradékot $(n + k)$ -val osztva. Az a_i számok páronként különböző maradékot adnak, csakúgy mint a b_i számok. Ha a c_j számok közül kettő ugyanazt a maradékot adja, akkor már készen is vagyunk. Hasonlóképpen készen vagyunk akkor is, ha valamelyik c_j szám ugyanolyan maradékot ad, mint valamelyik a_i vagy b_i , hiszen mind maga az a_i szám, mind pedig a b_i minden egyes összeadandója szerepel bármelyik c_j összeadandói között. Mivel a_i a b_j -nek is összeadandója $j \neq i$ esetén, feltehetjük azt is, hogy ilyen esetekben a_i és b_j különböző maradékot adnak.

Összefoglalva, feltehetjük tehát, hogy ha a fent felsorolt $n + k + 2$ szám között kettő azonos maradékot ad $(n + k)$ -val osztva, akkor ez a két szám a_i és b_i egy alkalmas $1 \leq i \leq k + 1$ indexre. Minden egyéb esetben ugyanis a bizonyítandó állítás az elmondottak miatt rögtön következik. Vegyük észre azt is, hogy azonnal befejezettnek tekinthetjük a bizonyítást akkor is, ha a felsorolt $n + k + 2$ szám valamelyike osztható $(n + k)$ -val. Egyetlen olyan eset képzelhető már csak el, amelyben még nem végeztük el a bizonyítást, nevezetesen ha 3 különböző i index is létezik úgy, hogy a_i és b_i ugyanazt a maradékot adják, vagyis különbségük, $s - 2a_i$ osztható $(n + k)$ -val. Legyenek ezek i_1, i_2 és i_3 , ekkor a $2a_{i_1}, 2a_{i_2}$ és $2a_{i_3}$ számok ugyanolyan maradékot adnak $(n + k)$ -val osztva. Nem nehéz megmutatni, hogy ez csak úgy lehetséges, ha az $a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}$ számok közül kettőnek a maradéka megegyezik, ellentétben a megoldás letelején tett feltevésünkkel. Ez mutatja, hogy a bizonyítást már minden esetben elvégeztük.

VI. megoldás. (Nagy Zoltán megoldásából.) Ha a számok közül valamelyik osztható $(n + k)$ -val, akkor már készen

is vagyunk, találtunk egy egytagú megfelelő összeget. Tegyük fel tehát, hogy az a_i számok p különböző maradékot ($p \geq k+1$) adnak $(n+k)$ -val osztva, és ezek $0 < m_1 < m_2 < \dots < m_p < n+k$. Ha egy összeg minden egyes tagját egy azzal azonos maradékot adó számmal helyettesítünk, a kapott összeg nyilván pontosan akkor lesz osztható $(n+k)$ -val, ha az eredeti összeg is ilyen volt. Ezért feltehetjük azt is, hogy mindegyik a_i valamelyik m_j -vel egyenlő.

Állítsuk nagyság szerinti sorrendbe az a_i számokat, vagyis legyen $a_1 = a_2 = \dots = a_{k_1} = m_1$, $a_{k_1+1} = a_{k_1+2} = \dots = a_{k_2} = m_2$, \dots , $a_{k_{p-1}+1} = \dots = a_n = m_p$, ahol $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_{p-1} < n$. Tekintsük most minden $1 \leq i \leq n$ esetén az $s_i = a_1 + a_2 + \dots + a_i$ összeget, és minden $1 \leq j \leq p-1$ esetén a $t_j = a_1 + a_2 + \dots + a_{k_j-1} + a_{k_j+1}$ összeget is. Ez összesen $n+p-1 \geq n+k$ szám. Ha ezek között van $(n+k)$ -val osztható, akkor készen vagyunk. Ellenkező esetben kell, hogy legyen kettő, amelyik ugyanolyan maradékot ad $(n+k)$ -val osztva.

Ha az s_i számok között van két ilyen, akkor a szokásos indoklás működik.

Ha $s_i - t_j$ osztható $(n+k)$ -val valamilyen i, j esetén, akkor ismét csak készen vagyunk. Ha ugyanis $i < k_j$, akkor az s_i összeg valódi része a t_j összegnek, és ezért $t_j - s_i$ néhány a_i összege. Ha $i > k_j$, akkor pedig a t_j összeg képezi valódi részét az s_i összegnek. Az pedig nem lehet, hogy $i = k_j$, mert ekkor $s_i - t_j = a_{k_j} - a_{k_j+1} = m_j - m_{j+1}$ lenne, ami nem osztható $(n+k)$ -val.

Végül tegyük fel, hogy $t_\ell - t_j$ osztható $(n+k)$ -val valamilyen $1 \leq j < \ell \leq p-1$ esetén. Ha még $j+1 < \ell$ is teljesül, akkor könnyen látható, hogy $t_\ell - t_j$ az a_i számok közül néhánynak az összege. Ugyanez a helyzet akkor is, ha $\ell = j+1$ és $k_{j+1} \geq k_j+2$. Az pedig nem lehetséges, hogy $\ell = j+1$ és $k_{j+1} = k_j+1$, ekkor ugyanis $t_\ell - t_j = a_{k_{j+1}+1} + a_{k_j} - a_{k_j+1} = m_{j+2} + m_j - m_{j+1}$. Viszont az m_i számokra tett feltevés miatt nyilván $0 < m_j < m_{j+2} + m_j - m_{j+1} < m_{j+2} < n+k$, vagyis az egyetlen megmaradt esetben $t_\ell - t_j$ nem osztható $(n+k)$ -val.