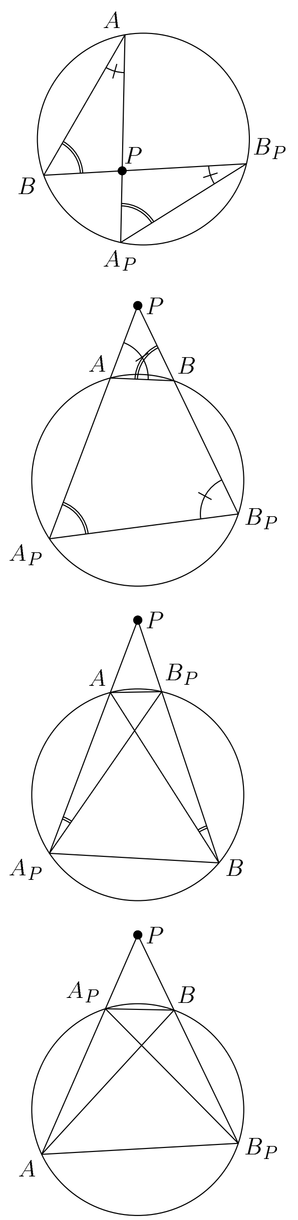
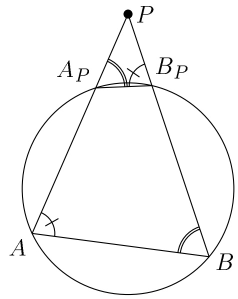
Az első két megoldás a körre vonatkozó inverzió fogalmára támaszkodik, ezért röviden összefoglaljuk ennek a transzformációnak legfontosabb tulajdonságait. Ha adott a síkon egy O középpontú, r sugarú k kör, akkor a k körre vonatkozó inverzió a sík O-tól különböző pontjainak az a leképezése, amely tetszőleges P ponthoz az OP félegyenes azon P' pontját rendeli hozzá, amelyre $OP \cdot OP' = r^2$. Ha az A pont (vagy alakzat) képe B, akkor a B ponté (alakzaté) éppen A. A leképezés tehát egy-egyértelmű, a k pontjait helyben hagyja, k-n belüli pontokat pedig k-n kívüli pontokba visz, és fordítva. Ha egy kör az O pontot elkerüli, akkor a körvonal képe egy, az O-t szintén elkerülő körvonal, egy O-n áthaladó k_1 körvonal képe pedig egy O-ra nem illeszkedő egyenes: a k és k_1 körök hatványvonala. Fontos tulajdonsága az inverziónak a szögtartás: ha k_1 és k_2 egy-egy körvonal (elfajuló esetben O-ra nem illeszkedő egyenes), akkor a k_1' és k_2' körök ugyanolyan szög alatt metszik egymást, mint a k_1 és k_2 körök. (Két egymást metsző kör által bezárt szög alatt közös pontjukban húzott érintőik hajlásszögét értjük.) Speciálisan, ha a k_1 kör k-t merőlegesen metszi, akkor $k' = k$ miatt k_1' is merőlegesen metszi k-t, méghozzá ugyanabban a két pontban, ezért $k_1' = k_1$.

Ezek után lássuk először a legkevesebb diszkussziót igénylő megoldást.

I. Megoldás. Ha P az ABC háromszög köré írható k körön van, akkor $A_P = B_P = C_P = P$, és így az $A_P B_P C_P$ háromszögről nem beszélhetünk. Az egyazon húrhoz tartozó kerületi szögek egyenlőségéről szóló tételre hivatkozva az *1. ábráról* leolvasható, hogy az $A_P B_P P$ háromszög hasonló a BAP háromszöghöz, függetlenül attól, hogy P a k körön belül, vagy azon kívül helyezkedik-e el. Ezért $\dfrac{A_P B_P}{B_P P} = \dfrac{BA}{AP}$, és hasonló módon $\dfrac{C_P B_P}{B_P P} = \dfrac{BC}{CP}$.

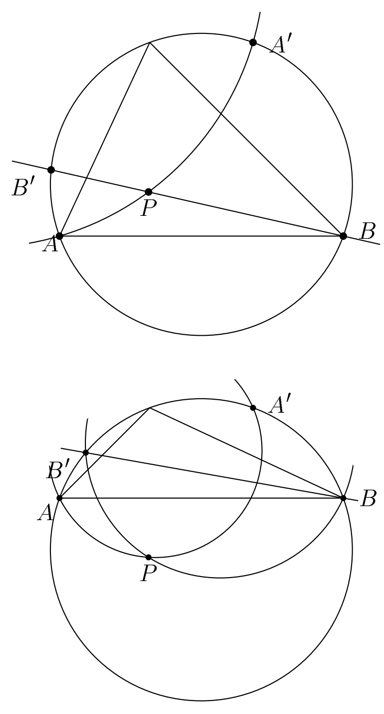




1. ábra

Az $A_PB_P = B_PC_P$ feltétel tehát ekvivalens az $\dfrac{AP}{CP} = \dfrac{AB}{CB}$ feltétellel, vagyis azzal, hogy P az A és C pontokhoz, valamint az $\dfrac{AB}{CB}$ arányhoz tartozó Apollóniusz-körnek k-ra nem illeszkedő pontja. (Abban a speciális esetben, amikor $AB = CB$, ez az Apollóniusz-kör elfajuló, és az AC szakasz felező merőlegesével egyezik meg.) Ugyanígy kapjuk azt is, hogy az $A_PB_P = A_PC_P$ feltétel ekvivalens azzal, hogy P a B és C pontokhoz, valamint az $\dfrac{BA}{CA}$ arányhoz tartozó Apollóniusz-körnek k-ra nem illeszkedő pontja. Az $A_PB_PC_P$ háromszög tehát pontosan akkor szabályos, ha P az említett két Apollóniusz-kör (k-ra nem illeszkedő) közös pontja.

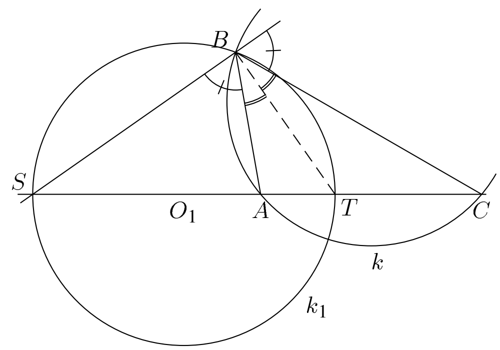
Az AC egyenes elválasztja az első Apollóniusz-kör k-val való, B-től különböző B' metszéspontját a B ponttól. Ugyanígy, a BC egyenes elválasztja a második Apollóniusz-kör k-val való, A-től különböző A' metszéspontját az A ponttól. Következésképpen az A, B, A', B' pontok a k körön ilyen sorrendben helyezkednek el (*2. ábra*), és ezért a két Apollóniusz-kör mind a k körön belül, mind azon kívül egy-egy pontban metszi egymást. Pontosabban, a k-n kívüli metszéspont nem létezik abban az esetben, ha mind a két Apollóniusz-kör elfajuló, ez azonban pontosan akkor következik be, ha az ABC háromszög szabályos. Ezzel a feladat első állítását beláttuk.



2. ábra

A második állítás bizonyítása azon az észrevételen alapul, hogy az említett Apollóniusz-körök a k kört merőlegesen metszik. Ekkor ugyanis a szögtartás miatt a k-ra vonatkozó inverzió mind a két Apollóniusz-kört saját magába viszi, és ezért a körök metszéspontjainak képe az inverzió során ugyanez a két pont. Mivel a k körön belüli pontok a k-n kívüli pontokba transzformálódnak, ez csak úgy lehetséges, ha az inverzió P-t és Q-t felcseréli. A P és Q pontok tehát egymásnak a k körre vonatkozó inverz képei, ennek megfelelően a PQ egyenes valóban áthalad a k kör O középpontján.

Szimmetria okokból elegendő azt megmutatni, hogy az első Apollóniusz-kör (jelöljük ezt k_1-gyel) merőlegesen metszi k-t. Ez nyilvánvaló, ha $AB = CB$, egyébként pedig feltehetjük, hogy $\alpha = BAC\sphericalangle > BCA\sphericalangle = \gamma$. Legyen a B-ből induló belső szögfelező talppontja T, a külsőé S. A szögfelező-tétel értelmében ST éppen a k_1 körnek az AC egyenesre eső átmérője, amely tartalmazza az A pontot is (*3. ábra*).



3. ábra

Ezért $SBT\sphericalangle = \dfrac{\pi}{2}$. Továbbá

$$TBO\sphericalangle = \frac{\beta}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\pi}{2} - \left(\pi - \left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2} - BTS\sphericalangle = BST\sphericalangle = SBO_1\sphericalangle,$$

ahol O_1 a k_1 kör középpontja. Ezért

$$O_1BO\sphericalangle = SBT\sphericalangle + TBO\sphericalangle - SBO_1\sphericalangle = \frac{\pi}{2},$$

és éppen ezt akartuk bizonyítani.

II. Megoldás. Rögzítsük a pozitív forgásirányt úgy hogy az A, B, C csúcsok ilyen sorrendben helyezkedjenek el a háromszög köré írt k körön. Hogy kevesebb esetet kelljen megkülönböztetni, irányított szögekkel fogunk dolgozni. Két irányított szöget azonosnak tekintünk akkor, ha különbségük 2π egész számú többszöröse.

Ha X, Y a k kör pontjai, akkor az XY irányított ívhez tartozó (irányított) kerületi szöget jelölje $\varphi(XY)$. Például $\varphi(AB) = \gamma$, $\phi(BC) = \alpha$ és $\phi(CA) = \beta$ a háromszög szögei, ugyanakkor $\varphi(BA) = 180^\circ - \gamma$. Azt mondjuk, hogy az XY (irányított) szakasz a P pontból ϕ szög alatt látszik, ha $XPY\sphericalangle = \phi$, ekkor az YX szakasz P-ből $-\phi$ szög alatt látszik. Az ilyen P pontok összessége alkotja az XY szakaszra támaszkodó ϕ szögű látókörívet, ami $\phi = \pi$ esetén a végpontjait nem tartalmazó XY szakasszal, $\phi = 0$ esetén pedig az XY egyenes XY szakaszon kívül eső részével egyezik meg.

Ennyi előkészület után most már rátérhetünk a megoldás lényegi részére. A k körön nyilván nem helyezkedhet el megfelelő pont. Legyen tehát először P a k kör egy tetszőleges belső pontja, ekkor az ABC és $A_PB_PC_P$ háromszögek azonos körüljárásúak. Az utóbbi háromszög tehát pontosan akkor szabályos, ha a $\phi(A_PB_P)$, $\phi(B_PC_P)$, $\phi(C_PA_P)$ szögek közül legalább kettő (és persze akkor a harmadik is) 60°. Mármost

$$\begin{gathered} APB\sphericalangle = 180^\circ - BAP\sphericalangle - PBA\sphericalangle = 180^\circ - BAP_A\sphericalangle - B_PBA\sphericalangle = \\ 180^\circ - \phi(BA_P) - \phi(B_PA) = \phi(AB) + \phi(A_PB_P) = \gamma + \phi(A_PB_P), \end{gathered}$$

Az AB, BA_P, A_PB_P és B_PA ívek ugyanis együtt éppen lefedik a k kört, így a hozzájuk tartozó kerületi szögek összege pontosan 180°. Hasonlóképpen, $BPC\sphericalangle = \alpha + \phi(B_PC_P)$ és $CPA\sphericalangle = \beta + \phi(C_PA_P)$. Az $A_PB_PC_P$ háromszög tehát pontosan akkor szabályos, ha a P pontból az AB, BC, CA szakaszok rendre $\gamma + 60^\circ$, $\alpha + 60^\circ$, $\beta + 60^\circ$ szögben látszanak. E három feltétel közül persze elég csak kettőt megkövetelni.

Most már nem nehéz megmutatni, hogy a k körön belül pontosan egy ilyen P pont van. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy α, $\gamma < 120^\circ$. Tekintsük most az AB szakaszra támaszkodó $\gamma + 60^\circ$ szögű ℓ_C látókörívet és a BC szakaszra támaszkodó $\alpha + 60^\circ$ szögű ℓ_A látókörívet, ezek tehát a megfelelő szakaszoknak a háromszöget tartalmazó oldalán helyezkednek el. A harmadik hasonló látókörívre is (amely már nem biztos, hogy az AC szakasznak a háromszöget tartalmazó oldalán helyezkedik el) szükségünk lesz később, ezt jelöljük ℓ_B-vel. Hogy ez a két ív pontosan egy pontban metszi egymást, méghozzá a k kör belsejében, a következőképpen igazolhatjuk. Először is vegyük észre, hogy mindkét látókörív a k kör belsejében halad. Másodszor, B közös végpontja mindkét ívnek. Ezért a két ívnek legfeljebb egy közös belső pontja lehet, és a metszéspont létrejöttének szükséges és elégséges feltétele az, hogy az ℓ_A ív a BC oldallal, illetve az ℓ_C ív a BA oldallal olyan szögeket zárjon be, amelyek összege β-t meghaladja (most kivételesen nem irányított szögektől beszélünk). Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy ez valóban így van. Azt is megállapíthatjuk, hogy lévén ekkor $CPA\sphericalangle = \beta + 60^\circ$, ez a P pont akkor esik az ABC háromszög belsejébe, ha $\beta < 120^\circ$, a háromszögön kívül helyezkedik el a $\beta > 120^\circ$ esetben, ha pedig $\beta = 120^\circ$, akkor az AC oldalra illeszkedik.

Összefoglalva tehát megállapíthatjuk, hogy a k körön belül mindig pontosan egy ilyen pont van, méghozzá az ABC háromszög belsejében, ha a háromszög minden szöge 120°-nál kisebb, annak határán, ha a háromszögnek van egy 120°-os szöge, illetve azon kívül, ha valamelyik szöge 120°-nál nagyobb. Ebből a P pontból az AB, BC, CA szakaszok rendre $\gamma + 60^\circ$, $\alpha + 60^\circ$, $\beta + 60^\circ$ alatt látszanak.

Legyen most a P pont a k kör egy külső pontja. Az $APB\sphericalangle$ meghatározásához különböztessünk meg négy esetet annak megfelelően, hogy a PA és PB félegyeneseken a P, A, A_P, illetve P, B, B_P pontok milyen sorrendben helyezkednek el (*1. ábra*). Megjegyezzük, hogy az irányított szögekkel való számolásnak az is előnye, hogy nem kell azzal foglalkoznunk, hogy ez a két félegyenes egymáshoz képest milyen helyzetű. Mind a négy esetben könnyen ellenőrizhető, hogy

$$APB\sphericalangle = 180^\circ - BAP\sphericalangle - PBA\sphericalangle = 180^\circ - \phi(BA_P) - \phi(B_PA) =$$

$$(180^\circ - \phi(BA_P) - \phi(A_PA)) - \phi(B_PA_P) = \phi(AB) - \phi(B_PA_P) = \gamma - \phi(B_PA_P)\ .$$

Ugyanígy $BPC\sphericalangle = \alpha - \phi(C_PB_P)$ és $CPA\sphericalangle = \beta - \phi(A_PC_P)$. Mivel most az $A_PB_PC_P$ háromszög körüljárása ellentétes az ABC háromszögével, ez a háromszög pontosan akkor szabályos, ha a $\phi(B_PA_P)$, $\phi(C_PB_P)$, $\phi(A_PC_P)$ szögek közül legalább kettő (és persze akkor a harmadik is) 60°. Ezzel ekvivalens az, hogy a P pontból az AB, BC, CA szakaszok rendre $\gamma - 60^\circ$, $\alpha - 60^\circ$ és $\beta - 60^\circ$ alatt látszanak. Jelölje az ennek megfelelő látóköríveket rendre ℓ'_C, ℓ'_A és ℓ'_B.

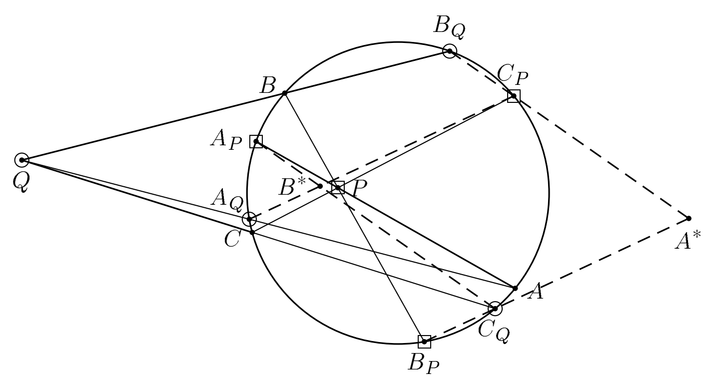
Állítás. *A k körre vonatkozó inverziónál az ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C ívek képe rendre ℓ'_A, ℓ'_B és ℓ'_C.*

Ebből azonnal következik, hogy a k körön kívül is pontosan egy olyan Q pont van, amelyre az $A_QB_QC_Q$ háromszög szabályos, mégpedig ez a pont a P pont inverz képe. Probléma csak akkor lenne, ha P egybeesne a k kör középpontjával, ez azonban nem lehetséges, hiszen az ABC háromszög nem szabályos. Egyúttal azt is megkaptuk, hogy a k kör középpontja, valamint a P és Q pontok egy egyenesen vannak.

Most már csak a fenti állítást kell igazolni. Ha a háromszög szögeire semmiféle megkötést nem teszünk, akkor szimmetria okok miatt nyilván elég annyit megmutatni, hogy ℓ_A inverz képe éppen ℓ'_A. A bizonyítás azon az egyszerű észrevételen múlik, hogy az a két ív, amelynek pontjaiból az XY (irányított) szakasz ϕ_1, illetve ϕ_2 szög alatt látszik, $\phi_1 - \phi_2$ szöget zár be egymással. Ennek alapján a kerületi szögek tételéből következik, hogy mind az ℓ_A ív, mind az ℓ'_A ív 60°-os szöget zár be a k körrel. Nem nehéz megmutatni, hogy az ℓ_A ív a k körön belül, az ℓ'_A ív pedig azon kívül halad. A két ívnek ugyanazok a végpontjai, de nem egészítik ki egymást egyetlen körvonallá. Mivel az a két körvonal, amely a k-t a B és C pontokban egyaránt 60°-os szög alatt metszi, egymás inverz képe a k körre nézve, a szóban forgó két ív is egymás inverze, és ezt akartuk bizonyítani.

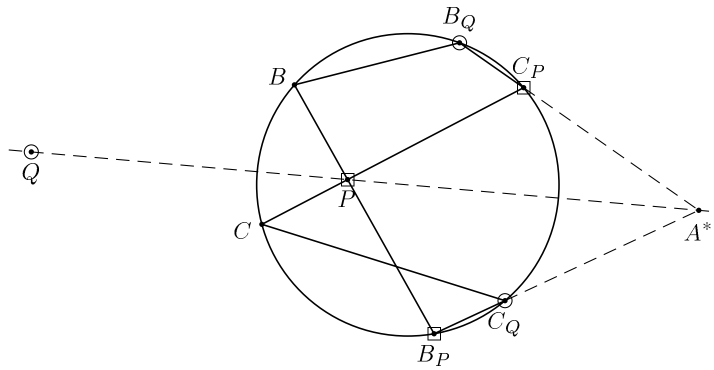
III. Megoldás. (*Béky Bence* megoldása.) Az előző megoldások valamelyikét követve először is megállapítjuk, hogy valóban két ilyen pont létezik, méghozzá egy a háromszög köré írható körön belül (jelöljük ezt P-vel), a másik pedig a körön kívül (legyen ez Q). Vegyük most észre, hogy az $A_PB_PC_P$ háromszög körüljárása megegyezik az ABC háromszögével, míg az $A_QB_QC_Q$ háromszögé azzal ellentétes. Található tehát egy, a k kör O középpontjára illeszkedő e egyenes, amelyre az $A_PB_PC_P$ háromszöget tükrözve az $A_QB_QC_Q$ háromszöget kapjuk.

Vizsgáljuk először azt az általános esetet, amikor A_P különbözik a B_Q, C_Q pontoktól, B_P különbözik az A_Q, C_Q pontoktól és C_P is különbözik az A_Q, B_Q pontoktól. Nem lehet, hogy például az A_PB_Q egyenes egybeesik az A_QB_P egyenessel, mert ekkor $A_P = B_P$ lenne. Az A_PB_Q egyenes tehát csak akkor lehet párhuzamos az A_QB_P egyenessel, ha egyben e-vel is párhuzamos. Ugyanez elmondható a másik két értelemszerűen felírt egyenespárról. Jelölje A^*, B^* és C^* rendre a B_PC_Q és B_QC_P egyeneseknek, az A_PC_Q és A_QC_P egyeneseknek, illetve az A_PB_Q és A_QB_P egyeneseknek a metszéspontját. Az elmondottak szerint ezen egyenespárok közül legfeljebb egy lehet párhuzamos helyzetben, az e egyenesre eső A^*, B^*, C^* pontok közül tehát kettő biztosan létrejön. Feltehetjük, hogy az A^* és B^* pontok ilyenek. Világos, hogy A^* és B^* különböző pontok (*4. ábra*).



4. ábra

Tekintsük most a k körbe írt $BB_QC_PCC_QB_P$ önmagát átmetsző hatszöget. Ennek BB_Q és CC_Q szemközti oldalai Q-ban, B_QC_P és C_QB_P szemközti oldalai A^*-ban, C_PC és B_PB szemközti oldalai pedig P-ben metszik egymást. Pascal tétele szerint tehát az A^* pont illeszkedik a PQ egyenesre (*5. ábra*).



5. ábra

Hasonlóképpen belátható, ezúttal az $AA_QC_PCC_QA_P$ hatszögből kiindulva, hogy a B^* pont is illeszkedik a PQ egyenesre. A PQ egyenes tehát egybeesik az A^*B^* egyenessel, vagyis az O ponton áthaladó e egyenessel, ami bizonyítja az általános esetben a feladat második állítását.

Tegyük fel végül, hogy mondjuk $B_P = C_Q = X$, ekkor az e-re való szimmetria miatt $B_Q = C_P = Y$, végül pedig $A_P = A_Q$ a k körnek az a Z pontja, amelyre az XYZ háromszög szabályos. Világos, hogy Z illeszkedik az e egyenesre, XY pedig merőleges arra. Ekkor az B_PC_Q és B_QC_P egyenesek helyett tekintsük a k körhöz annak X, illetve Y pontjában húzott érintőjét, ez a két egyenes a Z pontnak az XY-ra vonatkozó tükörképében metszi egymást. Jelöljük most ezt a pontot A^*-gal. A B^*, C^* pontok ugyanúgy definiálhatók, mint az általános esetben, és ezúttal egybeesnek Z-vel. Az A^* és B^* pontok tehát most is az e egyenest határozzák meg. Most már szinte szó szerint megismételhetjük az előző bekezdést azzal az apró módosítással, hogy most a $BB_QC_PCC_QB_P$ hatszög elfajuló abban az értelemben, hogy két-két szomszédos csúcsa egybeesik. Ezért a Pascal tétel alkalmazásánál a B_PC_Q és B_QC_P egyenesek helyett éppen az előbb említett érintőket kell tekinteni.

Megjegyzések. 1. A feladat komplex számok segítségével viszonylag egyszerű számolás útján is megoldható. Ezt az utat választotta Gyenes Zoltán a második állítás bizonyításához.

2. Egy mélyebb matematikai eszközöket használó megoldást tartalmaz, és a feladat hátterére mutat rá *Hraskó András* cikke, amely a következő számunkban jelenik meg.

3. A harmadik megoldásból azonnal leolvasható, hogy az $A_PB_PC_P$ és $A_QB_QC_Q$ háromszögek a PQ egyenesre szimmetrikusan helyezkednek el. Erre az eredményre az első megoldás ügyes folytatásával is eljuthatunk. *Hogyan?* Ennek az önmagában is szép feladatnak a megoldását már az olvasóra bízzuk.