

A szóban forgó rácspontok  $n + 1$  sorban és  $n + 1$  oszlopban helyezkednek el. Nevezetesen, az  $i$ -edik sor ( $0 \leq i \leq n$ ) azokat a rácspontokat tartalmazza, amelyeknek a második koordinátája  $i$ . Hasonlóképpen, az  $i$ -edik oszlop azokból a rácspontokból áll, amelyek első koordinátája  $i$ . Két rácspontot szomszédosnak fogunk hívni akkor, ha ugyanabban a sorban vagy oszlopban egymás mellett helyezkednek el. Az  $(i, j)$  pont szomszédai tehát az  $(i - 1, j)$ ,  $(i + 1, j)$ ,  $(i, j - 1)$  és  $(i, j + 1)$  pontok, amennyiben ezek is az  $ABCD$  négyzet pontjai.

Nyilván jó színezését kapjuk a pontoknak akkor, ha minden sorban felváltva színezzük pirosra és zöldre az egymást követő pontokat. Az egyes sorokat ekkor egymástól függetlenül kétféleképpen színezhajjuk, ezért az ilyen színezéseknek a száma  $2^{n+1}$ . Ugyanílyen megfontolásból lesz jó az a  $2^{n+1}$  színezés is, ahol az egyes oszlopokban követik egymást felváltva a piros és zöld pontok. Mivel a pontokat kétféleképpen lehet úgy kiszínezni, hogy sem a sorokban, sem az oszlopokban nincs két szomszédos azonos színű pont, ezért így összesen

$$2^{n+1} + 2^{n+1} - 2 = 2^{n+2} - 2$$

jó színezést találtunk.

Megmutatjuk, hogy a fentiekén kívül nincs más jó színezés. Ehhez tegyük fel először azt, hogy a pontokat megszíneztük a kívánt módon, és valamelyik oszlopban – mondjuk az  $i$ -edikben – van egymás mellett két azonos színű szomszédos pont. Legyenek ezek  $(i, j)$  és  $(i, j + 1)$ . Ekkor az  $(i - 1)$ -edik és az  $(i + 1)$ -edik oszlopban is található egymás mellett két azonos színű pont. Nevezetesen az  $(i - 1, j)$ ,  $(i - 1, j + 1)$ ,  $(i + 1, j)$ ,  $(i + 1, j + 1)$  pontok mind azonos színűek, és egyben az  $(i, j)$ ,  $(i, j + 1)$  pontoktól eltérő színűek kell, hogy legyenek. Indukcióval könnyen ellenőrizhető ezután, hogy az  $(i - k, j)$ ,  $(i - k, j + 1)$ ,  $(i + k, j)$ ,  $(i + k, j + 1)$  pontok színe az  $(i, j)$ ,  $(i, j + 1)$  pontokéval megegyező, ha  $k$  páros, illetve azokétól eltérő, ha  $k$  páratlan.

Tegyük fel most még azt is, hogy valamelyik sorban – mondjuk a  $j'$ -edikben – is van egymás mellett két azonos színű pont:  $(i', j')$  és  $(i' + 1, j')$ . Az előbbihez hasonló gondolatmenettel (vagy egyszerűbben: szimmetria okokra hivatkozva) megállapíthatjuk, hogy minden  $k$ -ra az  $(i', j' - k)$ ,  $(i' + 1, j' - k)$ ,  $(i', j' + k)$ ,  $(i' + 1, j' + k)$  pontok azonos színűek.

A fentiek szerint az  $(i', j)$  pont színe meg kell, hogy egyezzen mind az  $(i', j + 1)$ , mind az  $(i' + 1, j)$  pont színével. Ez azonban egy jó színezésben nem történhet meg, hiszen a felsorolt három pont éppen egy egységoldalú rácsnégyzet három csúcsa. Ez az ellentmondás igazolja azon állításunkat, miszerint minden jó színezésben vagy az oszlopokban, vagy a sorokban váltakozó színű pontok követik egymást. A kérdéses színezések száma tehát  $2^{n+2} - 2$ .