Megmutatjuk, hogy $f_3(x)=x$.

$$f_2(x)=f_1\big(f_1(x)\big)=-\frac{2f_1(x)+7}{f_1(x)+3}=-\frac{-2\dfrac{2x+7}{x+3}+7}{-\dfrac{2x+7}{x+3}+3}=$$

$$=-\frac{-4x-14+7x+21}{-2x-7+3x+9}=-\frac{3x+7}{x+2}.$$

Hasonló számolással kapjuk, hogy

$$f_3(x)=f_1\big(f_2(x)\big)=-\frac{2f_2(x)+7}{f_2(x)+3}=-\frac{-2\dfrac{3x+7}{x+2}+7}{-\dfrac{3x+7}{x+2}+3}=$$

$$=-\frac{-6x-14+7x+14}{-3x-7+3x+6}=-\frac{x}{-1}=x.$$

Ez azt jelenti, hogy $f_6(x)=f_3\big(f_3(x)\big)=f_3(x)=x$, és indukcióval kapjuk, hogy ha $3\mid n$, akkor $f_n(x)=x$. Így $3\mid 2001$ miatt $f_{2001}(x)=x$, tehát $f_{2001}(2002)=2002$.

Somogyi Dávid (Fazekas Mihály Fővárosi Gyak. Gimn. 12. évf.)

Megjegyzések. 1. A megoldásból az is kiderül, hogy

$$f_n(x)=\begin{cases} x \\ -\dfrac{2x+7}{x+3}=f_1(x) \\ -\dfrac{3x+7}{x+2}=f_2(x) \end{cases}$$

attól függően, hogy n a 3-mal osztva 0, 1 vagy 2 maradékot ad.

2. A megoldás során igen felületesen kezeltük a függvények *értelmezési tartományát.* $f_1(x)$ pontosan akkor nem értelmes, ha $x=-3$. Összetett függvényként $f_1\big(f_1(x)\big)$ akkor értelmes, ha a belső függvény az, tehát $x\neq-3$, valamint $f_1(x)$ értéke behelyettesíthető, tehát $f_1(x)\neq-3$, azaz $x\neq-2$. Épp ezt az értéket zárja ki f_2 tört-alakjának nevezője.

$f_3(x)=f_1\big(f_2(x)\big)$ pedig akkor értelmes, ha $f_2(x)$ értelmes, azaz $x\neq-3$ és $x\neq-2$, továbbá $f_2(x)$ behelyettesíthető $f_1(x)$-be, $-\dfrac{3x+7}{x+2}\neq-3$. Szerencsére ez nem jelent újabb megszorítást, $f_2(x)$ éppen a -3 értéket nem veszi föl. A pontos állítás tehát: ha $x\neq-2$ és $x\neq-3$, akkor $f_3(x)=x$, ezen a két helyen pedig $f_3(x)$ nem értelmes. Ez pedig azt jelenti, hogy ha $n>3$, akkor $f_n(x)$ értelmezési tartománya nem szűkül tovább, tehát például jogosan helyettesítjük be a 2002-t f_{2001}-be.

3. A megoldás kulcsa az volt, hogy három helyettesítés után megkaptuk az $x\mapsto x$ függvényt (az értelmezési tartományon). Ez nyilván a megadott együtthatókon múlik, és ránézésre egyáltalán nem világos, hogy hogyan. Fölvetődhet a kérdés, hogy ehhez az észrevételhez csupán a türelmes próbálgatás „jutalmaként" juthatunk-e el.

Az $f_1(x)$ grafikonja

Az $f_1(x)$ grafikonja

Az értelmezési tartomány fenti vizsgálatát újragondolva megsejthetjük, sőt, szemléletesen igazolhatjuk is a talált tulajdonságot, mégpedig a megoldásban elkerülhetetlen számolgatás nélkül.

Láttuk, hogy a nyilvánvalóan kizárandó -3 mellett a -2-t kell kizárnunk, ami $f_1^{-1}(-3)$. Az alapvető észrevétel az, hogy újabb értékeket már nem kell kizárnunk, hiszen f_1 a -2 értéket egyáltalán nem veszi fel. A grafikonon látható, hogy ez azon múlik, hogy a görbe vízszintes aszimptotája $y=-2$.

Az aszimptotikus viselkedést szemléletesen úgy is szokás fogalmazni, hogy ha $x=-3$, akkor a függvényérték „végtelen nagy", illetve hogy ha az x „végtelen nagy", akkor a függvényérték -2.

Ha ezt például ténylegesen le akarnánk írni, akkor valahogy így tehetnénk:

$$f_1(-3) = \infty, \quad f_1(\infty) = -2.$$

Ha most beírjuk még, hogy $f_1(-2) = -3$, akkor nehéz nem felfigyelni a

$$-2 \xrightarrow{f_1} -3 \xrightarrow{f_1} \infty \xrightarrow{f_1} -2$$

„láncra": ha „bevesszük" a ∞ értéket a valós számok közé és az f_1 függvényt épp így terjesztjük ki, akkor ez a hármas ciklus azt jelenti, hogy $f_3(-2) = -2$, $f_3(-3) = -3$ és $f_3(\infty) = \infty$.

Innen tehát meg lehet sejteni, hogy $f_3(x)$ „barátságos" függvény lesz, és így a számolásnak is nagyobb önbizalommal vághatunk neki. De ez a kísérlet lényegében bizonyosságot is szolgáltat, ha meggondoljuk, hogy f_3 maga is racionális elsőfokú törtfüggvény, amit három helyettesítési értéke egyértelműen meghatároz. Ha tehát $f_3(x)$ három helyen ugyanazt az értéket veszi föl, mint az $x \mapsto x$ függvény, akkor – a teljes értelmezési tartományán – azonos vele. Ehhez persze az $x \mapsto x$ függvény értelmezési tartományát és értékkészletét is ki kell bővítenünk a ∞ értékkel.

4. A fentiekből az is kiderül, hogy hogyan készíthetők az f_1-hez hasonló tulajdonságú függvények. A kiterjesztett értelmezési tartományon ugyanis az

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad \text{függvény új értékei} \quad f(\infty) = \frac{a}{c} \quad \text{és} \quad f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty.$$

Így ha tetszőleges $u \neq v$ számokra az $f\colon \infty \to u \to v \to \infty$ hármas ciklust szeretnénk elérni, akkor az

$$f(x) = \frac{u(x-v) - (u-v)^2}{x-v}$$

függvény adódik. Éppen így készült a feladat f_1 függvénye az $u = -2$ és $v = -3$ értékekkel.