I. megoldás. Reggel 6 és este 6 óra között a kismutató minden lehetséges helyzetében pontosan egyszer van, kivéve az egyenesen lefelé mutató állást (6 óra). Ez azonban a feladat szempontjából érdektelen: ekkor ugyanis látható, hogy 6 óra van, mert ha a kismutató a függőlegesen felfelé álló mutató lenne, a másik is függőlegesen felfelé állna.

Az egyforma nagy- és kismutatóval rendelkező óráról akkor és csak akkor nem olvasható le a pontos idő, amikor egyaránt lehetséges, hogy az egyik mutató a nagymutató, és a másik a kicsi, illetve fordítva, de a két mutató nincs azonos helyen (ekkor ugyanis mindegy, hogy melyik melyik.)

Nézzük, mikor van olyan helyzet, hogy mindkét állás lehetséges.

Legyen az egyik mutató elfordulása a fok 12 órához képest, óramutató szerinti irányban. Vegyük először ezt kismutatónak. Ekkor a másik – a nagymutató – elfordulása $12a$ fok, mert a legutóbbi éjfél vagy dél óta ugyanannyi idő alatt ez 12-szer annyit fordult el. (Persze a $12a$-ban benne lehet néhány 360 fokos fordulat is.)

A másik mutatót kismutatónak véve teljesen hasonlóan láthatjuk, hogy az első mutató $144a$-val fordult el; elfordulása leírható tehát a-val és $144a$-val is. Ezért:

$$144a = a + k \cdot 360^\circ, \quad a = \frac{k \cdot 360^\circ}{143}.$$

Ez 0-tól 142-ig minden egyes k-ra más-más a-t ad, azaz a megadott időtartamban pontosan 143-szor volt olyan időpont, hogy nem tudhattuk, melyik a nagymutató, és melyik a kicsi.

Nézzük, hogy hány olyan esetben fedi egymást a két mutató! Ekkor, a fentiekhez hasonlóan:

$$12a = a + k \cdot 360^\circ, \quad a = \frac{k \cdot 360^\circ}{11}.$$

Tehát 11 esetben fedi egymást a két mutató.

143 időpontban nem tudjuk, hogy melyik mutató melyik; ebből 11-ben a két mutató fedi egymást, a maradékban más-más időt mutatnak, ha az egyik mutató a kismutató, illetve ha a másik; tehát pontosan $\underline{132}$ esetben nem lehet megtudni a pontos időt.

Rácz Béla András, (Bp., Fazekas M. Gimn., 9. o.t.)

II. megoldás. Jellemezzük mindkét mutató állását a 12-eshez viszonyított elfordulásával; válasszuk egységként a teljesszög 12-edrészét, 30°-ot. Ha ebben a mértékrendszerben a kismutató állása a $(0 \le a < 12)$ – azaz éppen a óra telt el 0 vagy 12 óra óta – akkor a nagymutatóé $12\{a\}$, ahol $\{\ldots\}$ a megfelelő szám törtrészét jelöli. Így a kismutató a állása esetén a két mutató felcserélése pontosan akkor eredményezi az óramutatók egy egyébként is lehetséges helyzetét, ha

$$12\big\{12\{a\}\big\} = a.$$

Az egyenlet megoldásához írjuk fel az a számot tizenkettes számrendszerben. Ekkor ugyanis a 12-vel való szorzás a „tizenkettedesvessző" jobbra léptetését, a törtrész képzése pedig a „tizenkettedesvessző" előtt álló jegyek törlését jelenti.

Legyen $a = b_1{,}b_2b_3b_4\ldots$, ahol tehát $0 \le b_i < 12$ egészek, a szám jegyei. A tizenkettes számrendszerbeli felírásban $12\big\{12\{a\}\big\}$ kiszámításakor kétszer töröljük le az első jegyet és kétszer léptetjük jobbra a tizenkettedesvesszőt:

$$12\big\{12\{a\}\big\} = b_3{,}b_4b_5\ldots$$

Ha az így kapott szám egyenlő a-val, azaz $b_1{,}b_2b_3\underline{b_4\ldots} = b_3{,}b_4b_5\ldots$, akkor $b_1 = b_3$, $b_2 = b_4$, és a továbbiakban is ezek a jegyek ismétlődnek, az a szám pedig $a = b_1{,}b_2\overline{b_1b_2}$ alakú, az a tizenkettes számrendszerbeli alakja periodikus és a kéttagú b_1b_2 jegycsoport a periódus.

Mivel $0 \le b_1, b_2 < 12$, azért összesen 144 darab b_1b_2 pár és ennek megfelelően 144 ilyen a szám van. Vegyük viszont figyelembe, hogy ha $b_1 = b_2$, akkor a két mutató fedi egymást. Ilyenkor természetesen meg tudjuk mondani az időt anélkül, hogy a mutatókat meg kéne különböztetnünk. Az összesen 144 lehetőségből ez 12 esetben fordul elő. (Ez valójában csak 11 időpontot jelent, hiszen ha $b_1 = b_2 = 11$, akkor a megfelelő 11, 11 11 11 … éppen a 12 végtelen tizenkettedestört alakja, ami a 0 órának felel meg.

A megmaradó $144 - 12 = 132$ esetben viszont a megkülönböztethetetlen mutatókat látva valóban nem tudjuk eldönteni, hogy

$$a_{12} = b_1{,}b_2b_1b_2\ldots \quad \text{vagy pedig} \quad a_{21} = b_2{,}b_1b_2b_1\ldots$$

óra telt-e el.

Reggel 6 és este 6 között – és ugyanígy bármely 12 órás időszakban – 132 olyan időpont van, amikor nem tudjuk megállapítani az időt, ha a mutatókat nem tudjuk megkülönböztetni.