I. megoldás. Egy egész szám pontosan akkor páros, ha az ellentettje is az; így bármilyen előjelezés esetén a tagok, és így az egész összegnek is ugyanaz a paritása, mint az $S_n = 1 + 2 + \ldots + n$ összegé. Így ha S_n páratlan, akkor a kívánt módon a 100-at nem lehet előállítani.

Tegyük fel, hogy S_n páros és nagyobb 100-nál; ekkor

$$S_n = 100 + 2d, \quad \text{ahol} \quad d < \frac{S_n}{2} < S_n.$$

Az S_n értéke éppen $2d$-vel (100-ra) csökken, ha d-t előállítjuk az $1, 2, \ldots, n$ számok közül néhánynak az összegeként, és az előállításban szereplő tagok előjelét választjuk negatívnak.

Azt, hogy minden S_n-nél kisebb k természetes szám előállítható $1, 2, \ldots, n$ közül néhánynak az összegeként, a k-ra vonatkozó teljes indukcióval igazolhatjuk: elegendő megmutatni azt, hogy ha k előállítható, akkor $k+1$ is. Ehhez elég olyan t tagot találni a k előállításában, hogy $t+1$ ne szerepeljen a tagok között; ekkor ugyanis t helyett $(t+1)$-et szerepeltetve az összeg 1-gyel nő, azaz éppen $(k+1)$-et ad. Ha nincs ilyen t, akkor $k = r + (r+1) + (r+2) + \ldots + n$ alakú, ahol $r > 1$, tehát az 1 nem szerepel a k előállításában; ekkor pedig $k + 1 = 1 + \big(r + (r+1) + (r+2) + \ldots + n\big)$.

Ezzel beláttuk, hogy 100 pontosan akkor állítható elő a kívánt alakban, ha $S_n \geq 100$, és S_n páros. Az előbbinek a feltétele $n \geq 14$, az utóbbinak pedig az, hogy n vagy $n+1$ osztható legyen 4-gyel.

Bérczi Kristóf (Szeged, Ságvári E. Gimn., 10. o.t.)

II. megoldás. Csak azzal az esettel foglalkozunk, amikor $n \geq 14$. Mivel $S_{14} = 105$ páratlan, azért $n \geq 15$. Vegyük észre, hogy

$$A_{15} = 1 + 2 + \ldots + 9 - 10 + 11 + \ldots + 15 = 100, \quad \text{és}$$

$$A_{16} = 1 + 2 + \ldots + 7 - 8 + 9 - 10 + 11 + \ldots + 16 = 100.$$

Négy egymás után következő természetes szám előjelét mindig megválaszthatjuk úgy, hogy az összegük 0 legyen:

$$a - (a+1) - (a+2) + (a+3) = 0.$$

Az A_{15} valamint A_{16} összegből kiindulva így az azonosság segítségével minden olyan n-re elő tudjuk állítani a 100-at, amely $15 + 4k$ vagy $16 + 4k$ alakú. A 15-től kezdve ezek éppen azok a számok, amelyekre S_n páros.

Birkner Tamás (Bp., Fazekas M. Gimn., 8. o.t.)