A feladat első két kérdésére közvetlen, gyors választ adhatunk a táblázat képzési szabálya alapján.

a) Egy adott sor minden eleme a következő sornak pontosan két eleméhez járul hozzá, ezért a másodiktól kezdve minden sorban kétszer akkora az elemek összege, mint az előzőben. A táblázat századik sorában tehát tehát 2^{99}-szer annyi az elemek összege, mint az elsőben, így a szóban forgó összeg $3 \cdot 2^{99}$.

b) Ha váltakozó előjellel adjuk össze egy sorban a számokat, akkor a másodiktól kezdve a megelőző sor elemei ennek az előjeles összegnek két szomszédos tagjához járulnak hozzá, azért egyszer pozitív, egyszer pedig negatív előjellel vesznek részt az összegben. Az egy-egy sorban váltakozó előjellel összeadott számok értéke tehát a második sortól kezdve 0, így a századikban is.

Megjegyzés. Táblázatunk viselkedésében a tényleges Pascal háromszög jól ismert tulajdonságaira ismerhetünk, és az is látszik, hogy a fenti két tulajdonság kizárólag a rekurzív képzési szabály: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ következménye.

A harmadik kérdés megválaszolása egyszerűbbé válik, ha a táblázatunkat és a Pascal háromszöget a hagyományostól eltérő formába írjuk (*1. ábra*). Ebben a formában a 0-dik sor után minden elemet úgy kapunk, hogy összeadjuk a fölötte álló elemet és annak baloldali szomszédját. (Hogy ez még a 0-dik oszlop elemeire is teljesüljön, azért a táblázatot szokás egy „(-1)-edik”, 0-kkal kitöltött oszloppal is kiegészíteni.)

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array} \qquad \longrightarrow \qquad \begin{array}{llll} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

1. ábra

$$\begin{array}{llllll} 0 & 2 & & & & \\ 0 & 2 & 2 & & & \\ 0 & 2 & 4 & 2 & & \\ 0 & 2 & 6 & 6 & 2 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

2. ábra

Tekintsük most a *2. ábra* Pascal-szerű táblázatát, amelyet az *1. ábra* átrendezett Pascal-háromszögéből kaptunk úgy, hogy annak minden elemét megszoroztuk 2-vel, az elemeket eggyel jobbra toltuk és az így felszabaduló 0-dik oszlopot nullákkal töltöttük ki. Erre a táblázatra nyilván teljesül az eredeti képzési szabály, hisz annak érvényességén sem a 2-vel való szorzás, sem pedig az eltolás nem változtat. Végül vegyük észre, hogy ha a két táblázatot elemenként összeadjuk (*3. ábra*), akkor az eredményül kapott táblázatra is teljesül a megadott képzési szabály, hiszen összeg tagjai csoportosíthatók. Mivel az összegül kapott táblázat 0-dik sorában éppen a kiinduló 1 és 2 áll és a táblázat további elemeit a képzési szabály egyértelműen meghatározza, a feladat táblázata éppen az *1.* és *2. ábra* táblázatainak elemenként elkészített összege.

$$\begin{array}{lllll} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \quad + \quad \begin{array}{llllll} 0 & 2 & & & & \\ 0 & 2 & 2 & & & \\ 0 & 2 & 4 & 2 & & \\ 1 & 2 & 6 & 6 & 2 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \quad = \quad \begin{array}{llllll} 1 & 2 & & & & \\ 1 & 3 & 2 & & & \\ 1 & 4 & 5 & 2 & & \\ 1 & 5 & 9 & 7 & 2 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

3. ábra

Ha a feladat sorszámozásától eltekintünk, akkor a Pascal háromszög n-edik sorának k-adik eleme $\binom{n}{k}$ $(n,\, k \ge 0)$, a *2. ábra* táblázatában eltolt táblázatban ugyanezen a helyen $2 \cdot \binom{n}{k-1}$ áll. Ha tehát a sorok és az elemek számozását a 0-val kezdjük, akkor táblázatunk n-edik sorának k-adik eleme $\binom{n}{k} + 2 \cdot \binom{n}{k-1}$. A feladat szövegezése szerint tehát a 100-adik sor 47-edik eleme $\binom{99}{46} + 2 \cdot \binom{99}{45}$.

Megjegyzések. 1. Az első két kérdés természetesen megválaszolható a talált formula és a binomiális együtthatókra vonatkozó alapvető összefüggések felhasználásával is.

2. A Pascal háromszög úgy is elkészíthető, hogy a 0-dik sort egy mindkét irányban végtelen számsorozatnak tekintjük, amelynek egyetlen nem 0 eleme az 1, a 0-dik helyen áll. Ezután pedig minden elem a fölötte lévő kettő

összege. Így természetes módon jelennek meg az 1-esek a háromszög két szélén és a formai okokból időnként szükséges negatív, illetve n-nél nagyobb k értékekre felírt $\binom{n}{k}$ mennyiségek értéke láthatóan 0. Nyilvánvaló, hogy ha a kiinduló sorozatot eltoljuk, illetve valós számmal szorozzuk, akkor ugyanilyen tulajdonságú táblázatokat kapunk, végül ilyenek összegeként minden olyan táblázatot megkaphatunk, ahol a kezdősorban véges sok 0-tól különböző elem áll és a feladatban leírt képzési szabállyal készül.

$$
\begin{array}{l}
0 \\
0\;1 \\
0\;1\;1 \\
0\;1\;2\;1 \\
0\;1\;3\;3\;1 \\
\vdots\;\vdots\;\vdots\;\vdots\;\vdots
\end{array}
\quad + \quad
\begin{array}{l}
1 \\
1\;1 \\
1\;2\;1 \\
1\;3\;3\;1 \\
1\;4\;6\;4\;1 \\
\vdots\;\vdots\;\vdots\;\vdots\;\vdots
\end{array}
\quad = \quad
\begin{array}{l}
1 \\ \hline
1\;2 \\
1\;3\;2 \\
1\;4\;5\;2 \\
1\;5\;9\;7\;2 \\
\vdots\;\vdots\;\vdots\;\vdots\;\vdots
\end{array}
$$

4. ábra

3. A feladat táblázata nem csak a megadott módon kapható. Ha az *1. ábra* második Pascal-táblázatát egy-egy egységgel lefelé és jobbra toljuk, akkor a *4. ábra* első táblázatát kapjuk. Ha most ezt a két táblázatot adjuk össze, majd az összeg-táblázat első sorát elhagyjuk, akkor a feladat táblázata adódik. Innen az n-edik sor k-adik elemére $(n \geq 0)$ $\binom{n+1}{k} + \binom{n}{k-1}$ adódik, ami nyilván a fenti összeg egy másik alakja.