

**I. megoldás.** Legyen a nagy szabályos háromszög három csúcsa  $A$ ,  $B$  és  $C$ . Az első beírt négyzet két csúcsa  $ABC$ -nek ugyanarra az oldalára esik. Legyen ez a két csúcs  $D$  és  $E$ , a négyzet másik két csúcsa pedig  $F$  és  $G$  (lásd az ábrát). Jelöljük a négyzet oldalának hosszát  $x$ -szel. Mivel  $ADG$  és  $BFE$  olyan derékszögű háromszögek, amelyeknek  $A$ -nál, illetve  $B$ -nél lévő szöge  $60^\circ$ -os, azért  $AD = BE = \frac{x \cdot \sqrt{3}}{3}$ , és így

$$AB = AD + DE + EB = x \left( 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} \right).$$

Az  $ABFG$  trapéz területe tehát

$$T_{ABFG} = \frac{1}{2} \cdot \left[ x + x \left( 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} \right) \right] \cdot x = x^2 \cdot \frac{3 + \sqrt{3}}{3}.$$

Ez az  $EFGD$  négyzet területének,  $x^2$ -nek  $\frac{3 + \sqrt{3}}{3}$ -szorososa. Ugyanilyen összefüggést kapunk a  $GFC$  háromszögbe írható négyzet és az ottani trapéz területe között, majd tovább az újabb és újabb négyzetek és trapézok területe között. A trapézok végtelen sorozata a teljes  $ABC$  háromszöget lefedi, minden trapéz területének  $\frac{3}{3 + \sqrt{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2} \approx 0,634$ -ed részét fedi le a megfelelő négyzet, tehát a négyzetek végtelen sorozata az  $ABC$  háromszög területének  $\frac{3 - \sqrt{3}}{2}$  részét fedi le.

**II. megoldás.** Az I. megoldás jelöléseit használjuk. Az  $ABC$  háromszög területe

$$T_{ABC} = AB^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \left( 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} \right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot x^2.$$

A  $CGF$  háromszög hasonló a  $CAB$  háromszöghöz, hasonlóságuk aránya megegyezik a két háromszögbe írható négyzetek oldalainak arányával. Vagyis a második háromszögbe írható négyzet oldala

$$x \cdot \frac{GF}{AB} = x \cdot \frac{1}{1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}} = x \cdot (2\sqrt{3} - 3).$$

Ugyanilyen hasonlóságok alapján az  $i$ -edik háromszögbe ( $i = 1, 2, 3, 4, \dots$ ) írható négyzet oldala  $x \cdot (2\sqrt{3} - 3)^{i-1}$ . Ezért a négyzetek végtelen sorozata által lefedett terület

$$T = x^2 \cdot \left( 1 + (2\sqrt{3} - 3)^2 + (2\sqrt{3} - 3)^4 + \dots \right).$$

Ennek a végtelen mértani sornak az összege az ismert képlet szerint:

$$T = x^2 \cdot \frac{1}{1 - (2\sqrt{3} - 3)^2} = x^2 \cdot \frac{3\sqrt{3} + 5}{8}.$$

A lefedett terület és az  $ABC$  háromszög területének hányadosa tehát

$$\frac{T}{T_{ABC}} = \frac{x^2 \cdot \frac{3\sqrt{3} + 5}{8}}{x^2 \cdot \left( 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} \right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2} \approx 0,634.$$

*Hablicsek Márton* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 9. o.t.) megoldásai alapján

