I. megoldás. Legyen a rögzített valós szám, és tekintsük az $f_a(x) = \dfrac{1+ax}{\sqrt{1+a^2}\,\sqrt{1+x^2}}$ függvényt. f_a minden valós számra értelmes, és mint az szokványos eszközökkel (elemi differenciálszámítással) megmutatható, f_a a $(-\infty;a]$ intervallumon növő, az $[a;+\infty)$ intervallumon fogyó, $\lim\limits_{+\infty} f_a = \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ és $\lim\limits_{-\infty} f_a = -\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$. Ezzel a jelöléssel adott a és b számokra pontosan akkor teljesül a feladat előírása, ha $f_a(b) > \dfrac{1}{2}$.

Az *1.a), b) ábrán* az f_a grafikonja látható $a > 0$, illetve $a < 0$ esetben. Könnyű számolással kapjuk, hogy ha $|a| \ge \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, akkor $\dfrac{|a|}{\sqrt{1+a^2}} \ge \dfrac{1}{2}$. Így ha $a \ge \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, akkor $f_a(x) > \dfrac{1}{2}$ minden $x \ge a$ esetén, ha pedig $a \le -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, akkor $f_a(x) > \dfrac{1}{2}$ minden $x \le a$ esetén.

Ez azt jelenti, hogy ha a négy adott valós szám közül kettő esik akár a $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{3};+\infty\right)$, akár pedig a $\left(-\infty;-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$ intervallumba, akkor teljesül rájuk az előírt egyenlőtlenség.

Ha egyik fenti intervallumban sincs egynél több a megadott számok közül, akkor legalább kettő esik a $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3};\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ intervallumba. Egyszerű számolással kapjuk, hogy $f_a\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) > \dfrac{1}{2}$ pontosan akkor teljesül, ha $a > -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Így ha $-\dfrac{\sqrt{3}}{3} < a \le b < \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, akkor

$$1 = f_a(a) \ge f_a(b) > f_a\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) > \frac{1}{2},$$

hiszen az f szigorúan monoton fogyó az $[a;+\infty)$ intervallumon. Ezzel megmutattuk, hogy négy valós szám között valóban mindig található kettő, amelyekre teljesül az előírt egyenlőtlenség.

II. megoldás. Némi tapasztalat és intuíció révén természetes jelentés adható az egyenlőtlenség bal oldalán szereplő kétváltozós kifejezésnek, továbbá – ennek nyomán – maga az állítás is egy geometriai közhellyé egyszerűsödik.

A nevezőben álló pitagoraszi mennyiségek nyomán természetesnek látszik az $A(1;a)$ és a $B(1;b)$ pontok bevezetése (*2. ábra*).

A koszinusztételt az OAB háromszögben felírva:

$$(a-b)^2 = (1+a^2) + (1+b^2) - 2\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}\cos AOB\sphericalangle,$$

ahonnan rendezés után $\cos AOB\sphericalangle = \dfrac{1+ab}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}}$, a szóban forgó egyenlőtlenség bal oldala adódik, maga a feltétel pedig a

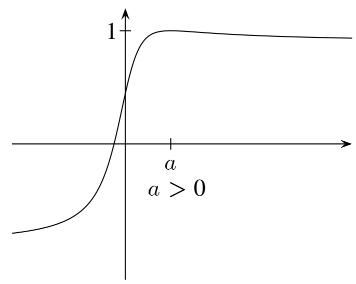
$$\cos AOB > \frac{1}{2}, \qquad \text{azaz az} \qquad AOB\sphericalangle < 60^\circ$$

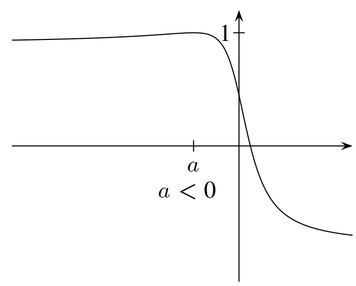
alakot ölti.

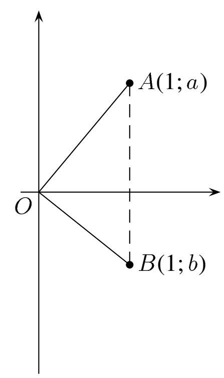
Ebben a formában az állítás azt jelenti, hogy ha adott négy pont az $x = 1$ egyenesen, akkor van köztük kettő, A és B, hogy $AOB\sphericalangle < 60^\circ$. Ez pedig nyilvánvaló, az O pontból kiinduló $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ és $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ meredekségű félegyenesek a nyílt pozitív félsíkot három 60°-os szögtartományra osztják, a középső nyílt, a két szélső pedig félig nyílt, így a skatulyaelv szerint a négy adott pont között van olyan kettő, amelyik ugyanannak a tartománynak a belsejében található (*3. ábra*). Erre a két pontra pedig az AOB szög kisebb, mint 60°.

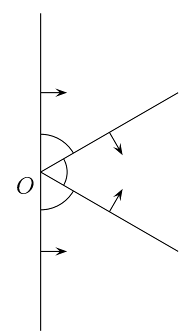
Megjegyzések. 1. A két megoldás kapcsolata jól látható, a második jelentése mintegy értelmezi az első függvényének a viselkedését, az ott kapott eredmények a geometriai megközelítésben érthetők meg. A feladat persze korrekt módon oldható meg az első megoldás módszerével, legfeljebb az az érzésünk, hogy egy sötét szobában kerestük a kijáratot a falak mentén tapogatva – és meg is találtuk –, míg a második megoldásban először a lámpát kapcsoltuk fel. Ez mindig látványos, de jó tudni, hogy akkor sem kell kétségbe esni, ha nem találjuk a kapcsolót.

2. A második megoldás ötletéhez az $\mathbf{a}(1;a)$ és $\mathbf{b}(1;b)$ vektorok skalárszorzata, $1+ab$, illetve a definícióból adódó $\cos\varphi = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$ alak felismerése közvetlenül is elvezethet, egyúttal rámutathatunk a feladat lehetséges eredetére.


1
a
a > 0


1
a
a < 0


A(1; a)
O
B(1; b)


O