Jelöljük a háromszög oldalait a szokásos módon $a$, $b$, $c$-vel, területét $T$-vel, kerületének felét pedig $s$-sel.

Először kifejezzük az egyenlőtlenség középső tagjában szereplő arányokat a háromszög oldalaival. Az $ABA_1$ háromszögben $BO$ szögfelező, ezért a szögfelezőtétel szerint a szemközti oldalt a mellette levő oldalak arányában osztja, vagyis

$$\frac{AO}{A_1O} = \frac{AB}{A_1B}. \tag{1}$$

Az $AA_1$ egyenes a $CAB$ háromszögben szögfelező, ezért

$$\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{c}{b}. \tag{2}$$

De $A_1B + A_1C = a$, vagyis $A_1C = a - A_1B$, amit (2)-be helyettesítve, majd a kapott egyenlőségből $A_1B$-t kifejezve

$$A_1B = \frac{a \cdot c}{b+c}.$$

Ezt (1)-be beírva kapjuk, hogy

$$\frac{AO}{A_1O} = \frac{AB}{A_1B} = \frac{c}{\frac{a\cdot c}{b+c}} = \frac{b+c}{a}.$$

Ugyanígy látható be, hogy

$$\frac{BO}{B_1O} = \frac{a+c}{b} \qquad \text{és} \qquad \frac{CO}{C_1O} = \frac{a+b}{c}.$$

Ismert, hogy $R = \dfrac{abc}{4T}$, $r = \dfrac{T}{s}$ és $T^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$. Ezeket az összefüggéseket felhasználva a $4R/r$ hányadost is kifejezhetjük az oldalakkal:

$$\frac{4R}{r} = \frac{\frac{abc}{T}}{\frac{T}{s}} = \frac{abc \cdot \frac{a+b+c}{2}}{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2}} = \frac{8abc}{(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)}.$$

A bizonyítandó egyenlőtlenségek tehát az oldalakkal kifejezve:

$$8 \le \frac{(a+b)(a+c)(b+c)}{abc} \le \frac{8abc}{(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)}. \tag{3}$$

A számtani és a mértani közepek közötti egyenlőtlenség szerint $2\sqrt{ab} \le a+b$, $2\sqrt{bc} \le b+c$ és $2\sqrt{ac} \le a+c$. Ezeket összeszorozva éppen a bizonyítandó bal oldali egyenlőtlenséggel ekvivalens

$$8abc \le (a+b)(b+c)(a+c)$$

egyenlőtlenséget kapjuk.

A jobb oldali egyenlőtlenséget is három egyenlőtlenség összeszorzásával kaphatjuk. Ezek:

$$\frac{a+b}{c} \le \frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{(b+c-a)(a-b+c)}}, \frac{b+c}{a} \le \frac{2\sqrt{bc}}{\sqrt{(a-b+c)(a+b-c)}} \quad \text{és} \tag{4} \frac{c+a}{b} \le \frac{2\sqrt{ac}}{\sqrt{(b+c-a)(a+b-c)}}.$$

Az oldalak szerepe a három egyenlőtlenségben szimmetrikus, ezért közülük elég csak egyet bebizonyítanunk. Az elsőt négyzetre emelve és átszorozva:

$$(a+b)^2(b+c-a)(a-b+c) \le 4abc^2, \qquad \text{azaz} (a+b)^2\left(c^2-(a-b)^2\right) \le 4abc^2.$$

Ezt rendezve:

$$c^2\left((a+b)^2-4ab\right) \le (a+b)^2(a-b)^2, \qquad \text{vagyis} c^2(a-b)^2 \le (a+b)^2(a-b)^2$$

adódik, ami nyilván igaz, mert a háromszög-egyenlőtlenség miatt $c^2 < (a+b)^2$; $(a-b)^2$ pedig nemnegatív. Tehát teljesülnek a (4) egyenlőtlenségek, s így az összeszorzásukkal kapható, (3) jobb oldalán lévő egyenlőtlenség is.

Könnyen látható, hogy mindkét bizonyított egyenlőtlenségben pontosan akkor van egyenlőség, ha $a = b = c$, azaz ha az $ABC$ háromszög szabályos.