

A feladat kérdésére igenlő a válasz: ilyen sorozat létezik. Az alábbi „öndokumentáló” sorozat: 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, ... önmaga gyakoriságsorozata is, és így persze minden  $k$ -ra létezik  $k$ -adrendű gyakoriságsorozata: a sorozat maga.

Az  $a_k$  sorozatot teljes indukcióval adjuk meg úgy, hogy értékei 1-gyel kezdve a pozitív egész számok, a sorozat pedig monoton növvő. Az  $a_k$  sorozattal együtt egy  $m_k$  sorozatot is építünk, ezek azok a helyek, ahol az  $a_k$  sorozat „ugrik”, először veszi fel a  $k$  értéket:  $m_1 = 1, m_2 = 2, m_3 = 4, m_4 = 6, m_5 = 9, \dots$

Legyen  $m_1 = 1 = a_1$ . Legyen most  $n > 1$ , és tegyük föl, hogy az  $m_k$  sorozat értékeit már megadtuk, ha  $1 \leq k < n$ , mégpedig úgy, hogy  $k \leq m_k$ . (Ez  $n = 1$ -re teljesül.) Ez persze azt jelenti, hogy az  $a_i$  sorozat elemeit is megadtuk, ha  $i \leq m_{n-1}$ . Az indukciós feltevés szerint tehát  $n - 1 \leq m_{n-1}$ , és így  $a_{n-1}$  értéke is definiált. Legyen most  $m_n = m_{n-1} + a_{n-1}$ , legyen  $a_i = n - 1$ , ha  $m_{n-1} < i < m_n$  és legyen  $a_{m_n} = n$ . Mivel az indukciós feltevés szerint  $n - 1 = m_{n-1}$  és  $a_{n-1} \geq 1$ , azért továbbra is fennáll, hogy  $n \leq m_n$ .

Végül a sorozat készítése alapján világos, hogy  $a_k = n - 1$  pontosan akkor teljesül, ha  $m_{n-1} \leq k < m_n = m_{n-1} + a_{n-1}$ , tehát éppen  $a_{n-1}$ -szer, ezért  $f_k = a_k$  valóban minden  $k$ -ra fennáll.