

Jelölje  $a_n$  a sorozat  $n$ -edik tagját. Erre teljesül, hogy  $a_n = x^2 - 1$ .

Legyen  $x$  többszöröse 3-nak, azaz  $x = 3k$ , ekkor  $a_n = x^2 - 1 = 9k^2 - 1$ , ez 3-nak nem többszöröse, ilyen alakú számok tehát nem lesznek a sorozatban.

Ha  $x = 3k + 1$  alakú, akkor

$$a_n = (3k + 1)^2 - 1 = 9k^2 + 6k,$$

ez többszöröse 3-nak. Ilyen alakú számok szerepelni fognak a sorozatban.

Végül, ha  $x = 3k + 2$ , akkor

$$a_n = (3k + 2)^2 - 1 = 9k^2 + 12k + 3,$$

ezen tagjai a sorozatnak. Így minden egész számot megvizsgáltunk (hiszen egy egész szám vagy többszöröse 3-nak, vagy 3-mal osztva 1-et vagy 2-t ad maradékul).

A sorozat tagjai tehát 3, 15, 24, 48, 63, 99, ... Könnyen belátható, hogy ha  $n$  páratlan, akkor  $k = \frac{n-1}{2}$  és  $a_n = 9k^2 + 12k + 3$ ; például  $n = 1$ -re  $k = 0$  és  $a_1 = 3$ .

A 2001 páratlan, így  $k = \frac{n-1}{2} = \frac{2001-1}{2} = 1000$ , és  $a_n = 9k^2 + 12k + 3$  miatt  $a_{2001} = 9 \cdot 10^6 + 12 \cdot 10^3 + 3$ , ami 1000-rel osztva 3-at ad maradékul.

*Megjegyzés.* A sorozat tagjait 1-gyel növelve a 4, 16, 25, 49, ... négyzetszámokból álló sorozatot, ezek négyzetgyökét véve a 3-mal nem osztható számok 2, 4, 5, 7, ... sorozatát kapjuk. Ennek a  $k$ -edik eleme minden páratlan  $k$ -ra  $(k-1) \cdot \frac{3}{2} + 2$ , minden páros  $k$ -ra  $k \cdot \frac{3}{2} + 1$ . A sorozat 2001-edik eleme eszerint  $2000 \cdot \frac{3}{2} + 2$  négyzeténél 1-gyel kevesebb, ez pedig  $3002^2 - 1$ , ami láthatóan  $2^2 - 1 = 3$  maradékot ad 1000-rel osztva.

A transzformált sorozat „rövidebben”  $b_k = 1 + \left\lfloor \frac{3k}{2} \right\rfloor$  alakban is írható, ahol  $k \geq 1$ .  $k = 2001$ -re ismét  $b_k = 1 + 3001 = 3002$  adódik.