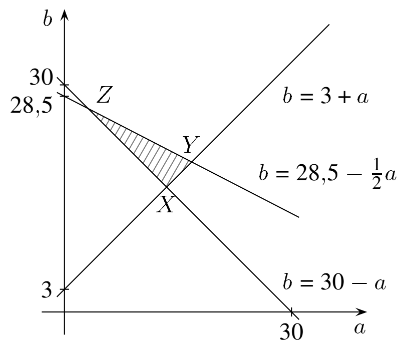
I. megoldás. A zenemű 3 tételének hosszát jelölje a, b, c úgy, hogy $a < b < c$ legyen; $a + b + c = 60$ szerint $c = 60 - a - b$. Egyik tétel sem hosszabb, mint a másik kettő együttvéve; esetünkben ez azt jelenti, hogy $60 - a - b = c \le a + b$, azaz $a + b \ge 30$. A különbségek mindegyike legalább 3, vagyis $b \ge a + 3$ és $60 - a - b = c \ge b + 3$. Így a feladat feltételei a következő egyenlőtlenségekkel írhatók le:

$$b \ge 30 - a(1)b \ge 3 + a(2)b \le 28,5 - \frac{1}{2}a(3)$$



Ábrázoljuk ezeket az összefüggéseket az a; b koordináta-rendszerben (*ábra*). A lehetséges a, b értékpárok a megfelelő tartományok közös részébe (a jelölt háromszögbe) eső pontok koordinátái, ezért az X, Y, Z pontok koordinátáinak kiszámításával megkaphatjuk a legrövidebb tétel hosszának korlátait. Látható, hogy a Z pont első koordinátája szolgáltatja a lehető legkisebb, az Y ponté pedig a lehető legnagyobb a értéket.

Az Y pont koordinátái a

$$b = 3 + a, \qquad b = 28,5 - 0,5a$$

egyenletrendszer megoldása: $Y(17; 20)$.

A Z pont koordinátái pedig a

$$b = 30 - a \qquad 2b = 57 - a$$

egyenletrendszer megoldásából adódnak: $Z(3; 27)$.

Ezek alapján a legrövidebb tétel hossza legalább 3, legfeljebb 17 perc lehet, azaz $3 \le a \le 17$.

II. megoldás. Ha a három tétel hossza $a < b < c$, és ezek között a különbség páronként legalább 3, akkor $a + 3 \le b \le c - 3$ és $a + 3 + b + c - 3 = 60$ miatt $a + 3$ legfeljebb 20, így $a \le 17$.

Tudjuk, hogy $b \le c - 3$, azaz $3 \le c - b$. A $c \le a + b$ feltételből (egyik tétel sem hosszabb, mint a másik kettő együtt) viszont $c - b \le a$ következik, így $3 \le c - b \le a$, tehát $3 \le a$, az előző eredménnyel együtt eszerint $3 \le a \le 17$.

Be kell még látni, hogy ezek a szélsőértékek valóban határok, nemcsak korlátok, keresünk egy-egy példát mindkettőre: $a = 17$, $b = 20$, $c = 23$, illetve $a = 3$, $b = 27$, $c = 30$. (A példák egyébként a konstrukcióból azonnal adódnak.)

Megjegyzés. Nem használtuk a $(0 <)a < b < c$-ből triviálisan adódó $a \le b + c$ és $b \le c + a$ feltételeket. Tetszőleges $3 \le a \le 17$ esetén b és c egy lehetséges értéke: $b = \dfrac{57 - a}{2}$, $c = \dfrac{63 - a}{2}$.