I. megoldás. Az $f(x)=3x^4-4x^3$ függvény grafikonja az *1. ábrán* látható, szaggatott vonallal rajzoltuk meg a keresett egyenest.

Vegyük észre, hogy ha a szóban forgó polinomokon elvégezzük az $x \leftarrow x+\frac{1}{3}$ helyettesítést – grafikusan ez azt jelenti, hogy a görbét eltoljuk az x tengely mentén $-\frac{1}{3}$ egységgel –, akkor a kapott $f_1(x)=f\left(x+\frac{1}{3}\right)$ negyedfokú polinom nem tartalmaz harmadfokú tagot:[1]Ezt az – úgynevezett Tschirnhaus-féle – helyettesítést alkalmazzák az általános negyedfokú egyenlet megoldásának első lépéseként is a harmadfokú tag kiküszöbölésére.

$$f_1(x)=3\left(x+\frac{1}{3}\right)^4-4\left(x+\frac{1}{3}\right)^3=3x^4-2x^2-\frac{8}{9}x-\frac{1}{9}.$$

$f_1(x)$-ben a páros fokú tagokat teljes négyzetté alakítva kapjuk, hogy

$$f_1(x)=3\left(x^2-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{8}{9}x-\frac{4}{9}.$$

Az $y=3\left(x^2-\frac{1}{3}\right)^2$ grafikonját (*2. ábra*) nyilván az x tengely érinti kétszer, így az $f_1(x)$ grafikonjának kettős érintője $y=-\frac{8}{9}x-\frac{4}{9}$. A keresett egyenest most már az inverz $x \leftarrow x-\frac{1}{3}$ helyettesítéssel kapjuk; egyenlete:

$$y=-\frac{8}{9}\left(x-\frac{1}{3}\right)-\frac{4}{9}=-\frac{8}{9}x-\frac{4}{27}.$$

II. megoldás. Az $y=ax+b$ egyenletű egyenes pontosan akkor érinti két pontban az $y=3x^4-4x^3$ függvény grafikonját, ha a $p(x)=3x^4-4x^3-ax-b$ polinom grafikonja két helyen érinti az x tengelyt, azaz két többszörös gyöke van. A görbe negyedfokú, ezért mindkét többszörös gyök kétszeres, több gyöke nincsen, így ha a gyökök x_1 és x_2, akkor a $p(x)$ gyöktényezős alakja

$$(*)\qquad p(x)=3(x-x_1)^2(x-x_2)^2.$$

A jobb oldalon a műveleteket elvégezve:

$$3x^4-4x^3-ax-b=$$
$$=3x^4-6(x_1+x_2)x^3+3(x_1^2+4x_1x_2+x_2^2)x^2-6x_1x_2(x_1+x_2)x+3x_1^2x_2^2.$$

Az együtthatók egyenlőségéből

$$x_1+x_2=\frac{2}{3},(1)x_1^2+4x_1x_2+x_2^2=0,(2)6x_1x_2(x_1+x_2)=a,(3)-3x_1^2x_2^2=b.(4)$$

(2)-ből $(x_1+x_2)^2=-2x_1x_2$, azaz (1) felhasználásával $x_1x_2=-\frac{2}{9}$. Innen (3)-ból $a=-\frac{8}{9}$, (4)-ből pedig $b=-\frac{4}{27}$.

A keresett egyenes egyenlete tehát csak $y=-\frac{8}{9}x-\frac{4}{27}$ lehet, ez az egyenes pedig valóban megoldás, ugyanis az (1), (2) egyenletekből álló rendszer megoldásai valós számok ($x_1=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}$ és $x_2=\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}$), és így a fenti lépések megfordíthatók, a $(*)$ szorzat tényezői valós együtthatós polinomok.

Rácz Béla András (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 9. o.t.)

III. megoldás. Ha a tetszőleges valós szám, akkor a görbét az $(a;f(a))$ pontjában érintő egyenes egyenlete

$$y=f'(a)(x-a)+f(a).$$

Ha $b\neq a$, akkor a $(b;f(b))$-beli érintő pontosan akkor lesz ugyanez az egyenes, ha

$$f'(a)=f'(b)(1)f(a)-a\cdot f'(a)=f(b)-b\cdot f'(b).(2)$$

(1)-ből $a-b\neq 0$-val osztva kapjuk, hogy

$$(3)\qquad a^2+ab+b^2-a-b=0,$$

11

(2)-ből pedig ugyanígy, hogy

$$9(a+b)(a^2+b^2)-8(a^2+ab+b^2)=0. \tag{4}$$

(3) szerint $a^2+ab+b^2=a+b$; ezt felhasználva, (4)-ből

$$a^2+b^2=\frac{8}{9}, (5) amit (3)-ba helyettestve a+b-ab=\frac{8}{9}. (6)$$

Az (5), (6) egyenletrendszer közvetlenül negyedfokú egyenletre vezet; mivel mindkét egyenlet szimmetrikus, érdemes bevezetni az $u=a+b$, $v=ab$ új ismeretleneket: így az

$$u^2-2v=\frac{8}{9}, u-v=\frac{8}{9}$$

egyenletrendszerhez, és innen $v=u-\frac{8}{9}$ helyettesítésével az $u^2-2u+\frac{8}{9}=0$ egyenlethez jutunk. Ennek gyökei $u_1=\frac{2}{3}$, $u_2=\frac{4}{3}$. Ennek megfelelően $v_1=-\frac{2}{9}$ és $v_2=\frac{4}{9}$.

A keresett a és b értékek most már a

$$t^2-u_1t+v_1=0, \qquad \text{illetve a} \qquad t^2-u_2t+v_2=0$$

egyenletek megoldásai.

Az első esetben $a=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}$ és $b=\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}$, a második esetben viszont a két gyök egyenlő, $a=b=\frac{2}{3}$. A megoldást az $a\neq b$ feltétellel keressük, így a második lehetőség elesik.

Ha $a=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}$, akkor $f'(a)=-\frac{8}{9}$ és $f(a)-a\cdot f'(a)=-\frac{4}{27}$, így az $(a;f(a))$-beli érintő egyenlete

$$y=-\frac{8}{9}x-\frac{4}{27}.$$

Mivel lépéseink megfordíthatóak, ugyanez a $(b;f(b))$-beli érintő egyenlete is.

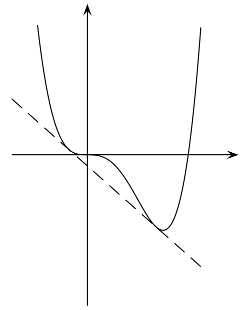
Kármán Péter (Budapest, Móricz Zs. Gimn., 12. o.t.)

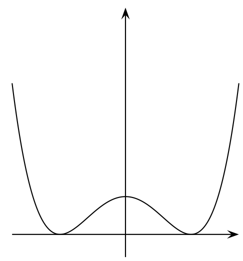
Megjegyzések. 1. Az $a=b=\frac{2}{3}$ az $y=3x^4-4x^3$ görbe – egyik – inflexiós pontjának az abszcisszája. Szigorúan véve itt is két egybeeső érintőről beszélhetünk, most azonban az érintési pontok is egybeesnek.

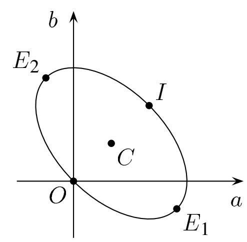
2. A III. megoldásban kapott (3) feltételt $\left(\frac{f'(a)-f'(b)}{a-b}=0\right)$ az $(a;b)$ koordináta-rendszerben ábrázolva egy ellipszist kapunk (*3. ábra*). Ez az ellipszis azokból a $P(a;b)$ pontokból áll, amelyekre az $(a;f(a))$ és $(b;f(b))$- pontokban az $y=3x^4-4x^3$ görbéhez párhuzamos érintők húzhatók. Az ellipszis tengelyei párhuzamosak a koordinátatengelyek szögfelezőivel, középpontja pedig a $C\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ pont.

Az ellipszis kistengelyének végpontjai, O, és $I\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$ az $y=3x^4-4x^3$ görbe két inflexiós pontját adják. Első ránézésre meglepőbb, hogy a nagytengely végpontjai, $E_1\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ és $E_2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ éppen a kettős érintő érintési pontjait szolgáltatják. Ez a kapcsolat világossá válik, ha átgondoljuk a negyedfokú görbe „szimmetriáját” az $x=\frac{1}{3}$ pontra nézve. Ez az érték az érintők meredekségét számoló harmadfokú derivált grafikonja szimmetria-középpontjának az abszcisszája, és ha a negyedfokú polinomból kivonjuk a kettős érintő egyenletét, akkor a kapott negyedfokú görbe már valóban tengelyesen szimmetrikus lesz az $x=\frac{1}{3}$ egyenesre. (Ez indokolja – többek között – az I. megoldás helyettesítését.) Ez pedig azt jelenti, hogy a kettős érintő érintési pontjainak abszcisszái is szimmetrikusan helyezkednek el az $x=\frac{1}{3}$ pontra, a *3. ábrán* a megfelelő pont rajta van az $a+b=\frac{2}{3}$ egyenletű egyenesen is, ami éppen az ellipszis nagytengelye.

Könnyen ellenőrizhető, hogy ez a tulajdonság minden olyan negyedfokú görbére teljesül, amelynek létezik kettős érintője, pontosabban szólva az $\frac{f'(a)-f'(b)}{a-b}=0$ pontosan ebben az esetben lesz valós ellipszis egyenlete. Az így kapott ellipszisek hasonlók, excentricitásuk $\frac{\sqrt{3}}{3}$, állásuk olyan, ahogyan azt a *3. ábra* mutatja, kistengelyük végpontjai a negyedfokú görbe inflexiós pontjait – azaz a harmadfokú derivált szélsőértékeit –, nagytengelyük végpontjai pedig a kettős érintő érintési pontjait adják.






b
E_2
I
C
O
a
E_1