x helyére $f(y)$-t helyettesítve és a $k = f(0)$ jelölést használva:

$$f(0) = f(f(y)) + (f(y))^2 + f(f(y)) - 1 f(f(y)) = \frac{1}{2}\left(k + 1 - (f(y))^2\right).$$

Ezt beírva az eredeti feltételbe:

$$f(x - f(y)) = \frac{1}{2}\left(k - 1 - (f(y))^2\right) + xf(y) + f(x).$$

Legyen $g(x) = f(x) + \frac{x^2}{2}$. Ekkor

$$g(x - f(y)) = f(x - f(y)) + \frac{(x - f(y))^2}{2} == \frac{1}{2}\left(k - 1 - (f(y))^2\right) + xf(y) + g(x) - \frac{x^2}{2} + \frac{(x - f(y))^2}{2}, g(x - f(y)) = xf(y) + g(x$$

Először belátjuk, hogy $k = 1$. Mivel az azonosan 0 függvény nem megoldás, létezik olyan $y \in \mathbf{R}$, amelyre $f(y) \neq 0$, így $x = \frac{1}{f(y)}$-t helyettesíthetünk az eredeti képletbe:

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + f(x), \qquad \text{azaz} \qquad f(a) = f(b) + f(c)$$

alakú egyenlőséget kapunk.

$$g(x - f(a)) = g(x) + \frac{k-1}{2}, \qquad g((x - f(b)) - f(c)) = g(x - f(b)) + \frac{k-1}{2} = g(x) + k - 1.$$

E kettő egyenlőségéből $k - 1 = \frac{k-1}{2}$, azaz $k = 1$ következik.

Ekkor viszont $g(x - f(y)) = g(x)$, tehát $f(x)$ minden x-re periódusa g-nek. Másrészt $f(0) = k = 1$, ebből

$$f(1) = f(f(0)) = \frac{1}{2}(1 + 1 - 1)^2 = \frac{1}{2},$$

tehát $\frac{1}{2}$ függvényérték, és így g-nek periódusa. De

$$f(x - 1) = f(x - f(0)) = f(f(0)) + xf(0) + f(x) - 1 = \frac{1}{2} + x + f(x) - 1 = f(x) - \frac{1}{2} + x$$

is függvényérték, tehát g-nek periódusa.

Azt kaptuk, hogy g-nek periódusa $f(x)$, $f(x-1)$ és $\frac{1}{2}$, tehát ugyancsak periódus az $f(x) - f(x-1) + \frac{1}{2}$, ami pedig éppen x.

Tehát g minden szám szerint periodikus és csak így konstans lehet.

$g(0) = f(0) + \frac{0^2}{2} = 1$, tehát $g(x) = 1$, amiből $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$.

Behelyettesítéssel meggyőződhetünk róla, hogy ez valóban megoldás is.

Terpai Tamás megoldása