Először meghatározzuk az O pont AB-től mért d távolságát (a távolságok végig előjelesek). Invertáljunk a Γ_2 körre. Γ_1 kör képe egyenes, mert átmegy az O_2 ponton; ezen az egyenesen vannak Γ_1 és Γ_2 közös pontjai, így Γ_1 képe az AB egyenes. Γ képe érinti Γ_1, ill. Γ_2 képét, tehát az AB egyenest és a Γ_2 kört; AB-t M képében, M'-ben érinti (M' az O_2M és AB metszéspontja), Γ_2-t N-ben (N képe önmaga), tehát Γ' középpontja, T az ON egyenes metszéspontja az AB-re M'-ben állított merőlegessel. A Γ' kör átmérője, $2R' = R_2 + \frac{R_2^2}{2R - R_2} = \frac{2RR_2}{2R - R_2}$ (ha N átellenes pontja Γ-n U, Γ'-n U', akkor az új átmérő hossza $NO_2 + O_2U' = R_2 + \frac{R_2^2}{O_2U}$).

Tehát T távolsága AB-től $\frac{RR_2}{2R - R_2}$.

O_2 távolsága az inverzió miatt AB-től $\frac{R_2^2}{2R_1}$ (ugyanis az O_2-ből AB-re bocsátott merőleges talppontja a Γ_1 kör O_2-vel átellenes pontjának képe lesz.)

$$O_2T = R_2 - \frac{\frac{2RR_2}{2R-R_2}}{2} = \frac{RR_2 - R_2^2}{2R - R_2} = \frac{R_2(R - R_2)}{2R - R_2} OO_2 = R - R_2 OT = \frac{2R(R - R_2)}{2R - R_2},$$

tehát

$$\lambda = \frac{O_2T}{OT} = \frac{R_2}{2R} 1 - \lambda = \frac{OO_2}{OT} = \frac{2R - R_2}{2R}.$$

Ezekből látható, hogy ha O távolsága AB-től d, akkor O_2 távolsága AB-től

$$\lambda \cdot d + (1 - \lambda) \cdot TM' = \frac{R_2^2}{2R_1}.$$

Tehát

$$d = \frac{1}{\lambda} \frac{R_2^2}{2R_1} - \frac{1 - \lambda}{\lambda} \cdot \frac{RR_2}{2R - R_2} = \frac{RR_2}{R_1} - R = \frac{R(R_2 - R_1)}{R_1}.$$

Ebből kiszámolhatjuk O_1 távolságát CD-től. Γ_1 középpontosan hasonló Γ-hoz. A hasonlóság középpontja M, aránya $\frac{R_1}{R}$. A Γ-t Γ_1-be vivő hasonlóság O-t O_1-be, AB-t CD-be viszi, tehát O_1 és CD távolsága

$$d_1 = \frac{R_1}{R} \cdot d = R_2 - R_1,$$

ez éppen az igazolandó, mert így O_2 távolsága CD-től $d_1 + R_1$ ($AB \parallel CD$ miatt), ami nem más, mint R_2. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Gyenes Zoltán megoldása