Osszuk be a négyzetet keretekre az ábra szerint, és kívülről kezdve színezzünk minden második keretet feketére. A táblán minden mező pontosan két feketével szomszédos, tehát már ahhoz is meg kell jelölnünk a fekete mezőknek legalább a felét, ha csak annyit akarunk, hogy minden fekete mezőnek legyen megjelölt szomszédja. N tehát legalább ezek számának fele. Számoljuk ezt össze abban az esetben, amikor n 4-gyel is osztható, illetve ha 4-gyel nem osztható (az 1. ábrán a színezés az a) esetnek megfelelő).

$$4 \mid n: \quad \frac{1}{2}\left[12+(16+12)+\cdots+\left(\frac{n-4}{4}16+12\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{n}{4}12+16\frac{n-4}{4}\cdot\frac{n}{4}\cdot\frac{1}{2}\right]=\text{a)} \qquad =\frac{1}{2}\left[3n+\frac{n(n-4)}{2}\right]=\frac{n^2+2n}{4},$$

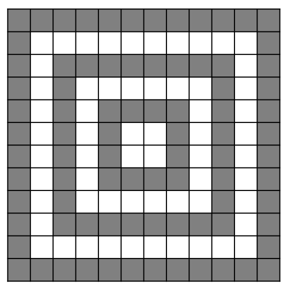
$$4 \not\mid n: \quad \frac{1}{2}\left[4+(4+16)+\cdots+\left(4+\frac{n-2}{4}16\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{n+2}{4}4+16\frac{n-2}{4}\cdot\frac{n+2}{4}\cdot\frac{1}{2}\right]=\text{b)} \qquad =\frac{1}{2}\left[n+2+\frac{n^2}{2}-2\right]=\frac{n^2+2n}{4}$$

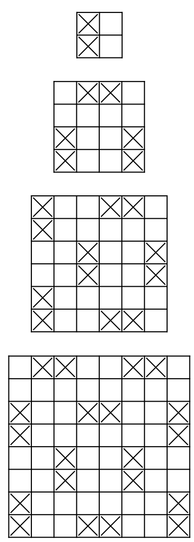
Ezt az értéket viszont el is érhetjük, csak a fekete kereten belül jelölve ki mezőket az alábbi módon: a fekete keretek bal alsó sarkából indulva két szomszédos mezőt kijelölünk, majd kettőt nem, majd kettőt megint igen stb., mindig a keret mentén lépegetve. Így nyilván minden keret felét jelöljük ki, így nyilván összesen $\frac{n^2+2n}{4}$ mezőt. A fekete keretek mezőinek nyilván lesz jelölt szomszédja, a fehér keretek mezői mellett pedig van valamelyik szomszédos fekete kereten jelölt mező, hiszen ezek közül a belső jelölését pontosan kettővel „feljebb" kezdtük el, így a két keret jelölt mezői váltogatják egymást.

N lehetséges legkisebb értéke tehát $\frac{n^2+2n}{4}$. A jelölést pl. $n=2$, 4, 6, 8-ra a *2. a, b, c, d ábra* mutatja.

Kiss Gergely és *Keszegh Balázs**[0] megoldása alapján

Megjegyzés. $n=4k+1$-re $\frac{n^2+2n+1}{4}$, $n=4k+3$-ra $\frac{n^2+2n-3}{4}$ mezőt kell kijelölni. Ennek bizonyítását itt nem közüljük.





[0]*Keszegh Balázs,* a budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium tanulója, a szlovák csapat tagjaként vett részt a versenyen.