Ha $x_i = 0$ minden i-re, akkor az egyenlőtlenség $0 \le C \cdot 0$, ami minden C mellett teljesül, sőt egyenlőség áll fenn. C meghatározása szempontjából tehát a $\sum\limits_{1\le i\le n} x_i > 0$ eset a lényeges, ezt vizsgáljuk tovább. Osszuk el az egyenlőtlenség mindkét oldalát a pozitív $\left(\sum\limits_{1\le i\le n} x_i\right)^4$ számmal:

$$\sum_{1\le i<j\le n} \frac{x_i}{\sum\limits_{1\le k\le n} x_k} \cdot \frac{x_j}{\sum\limits_{1\le k\le n} x_k} \left(\left(\frac{x_i}{\sum\limits_{1\le k\le n} x_k}\right)^2 + \left(\frac{x_j}{\sum\limits_{1\le k\le n} x_k}\right)^2\right) \le C.$$

Legyen $a_i = \dfrac{x_i}{\sum\limits_{1\le k\le n} x_k}$, így $\sum\limits_{1\le i\le n} a_i = 1$ és $0 \le a_i \le 1$. Az egyenlőtlenség új alakja:

$$\sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j (a_i^2 + a_j^2) \le C.$$

Becsüljük most meg a bal oldal $a_i^2 + a_j^2$ tényezőit felülről $\sum\limits_{1\le k\le n} a_k^2$-tel:

$$\sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j (a_i^2 + a_j^2) \le \sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j \sum_{1\le k\le n} a_k^2 = \left(\sum_{1\le k\le n} a_k^2\right)\left(\sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j\right).$$

A második tényezőt ki tudjuk fejezni, mivel

$$\left(\sum_{1\le k\le n} a_k\right)^2 = \sum_{1\le k\le n} a_k^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j,$$

tehát $\sum\limits_{1\le k\le n} a_k = 1$ alapján

$$\sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j = \frac{1 - \sum\limits_{1\le k\le n} a_k^2}{2}.$$

Legyen $M = \sum\limits_{1\le k\le n} a_k^2$, így

$$\sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j (a_i^2 + a_j^2) \le M\frac{1-M}{2} = \frac{M-M^2}{2} = \frac{1}{8}\left(1 - (2M-1)^2\right) \le \frac{1}{8},$$

mert $(2M-1)^2 \ge 0$.

$\dfrac{1}{8}$-dal az állítás tehát igaz. Kimutatjuk, hogy ez már éles is, tehát $C = \dfrac{1}{8}$. Megnézzük, mikor állhat itt egyenlőség. Pontosan akkor, ha

$$(2M-1)^2 = 0, \qquad \text{azaz} \qquad M = \frac{1}{2}, \qquad \text{valamint}$$
$$a_i a_j (a_i^2 + a_j^2) = a_i a_j M \qquad \text{minden } i \ne j \text{ párra.}$$

Ha lenne három pozitív a szám: a_i, a_j, $a_k > 0$, akkor a második feltétel sérülne, hiszen

$$a_i a_j (a_i^2 + a_j^2) < a_i a_j (a_i^2 + a_j^2 + a_k^2) \le a_i a_j M.$$

Tehát két szám, a_i és a_j kivételével a többi a szám nulla. Tehát $\sum\limits_{1\le k\le n} a_k = 1$ miatt $a_i + a_j = 1$ és $a_i^2 + a_j^2 = \dfrac{1}{2}$ $M = \dfrac{1}{2}$ miatt.

Azaz $a_i^2 + (1 - a_i^2) = \dfrac{1}{2}$, vagyis $4a_i^2 - 4a_i + 2 = 1$, tehát $(2a_i - 1)^2 = 0$, tehát $a_i = \dfrac{1}{2}$, amiből $a_j = \dfrac{1}{2}$.

Ekkor ráadásul a bal oldal értéke éppen $\dfrac{1}{8}$, tehát $C = \dfrac{1}{8}$.

Ha $a_i = a_j = \dfrac{1}{2}$, akkor $x_k = 0$, ha $k \ne i$, j és $x_i = x_j > 0$. Azonban $x_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ is egyenlőséget eredményez, a (b) részre tehát a válasz:

Egyenlőség akkor és csak akkor áll, ha az x-ek közül $n-2$ darab 0-val egyenlő, a maradék kettő pedig egymással egyenlő.

Lukács László megoldása