Legyen S egy ilyen ponthalmaz. Ekkor legyen az S-ben lévő pontok súlypontja P, és e egy tetszőleges szimmetriatengely. Ha e-re tükrözzük az S ponthalmazt, akkor ugyanehhez a ponthalmazhoz jutunk, tehát ha a súlypontját tükrözzük e-re, akkor önmagába megy át. Ez azt jelenti, hogy P szükségképpen rajta van az e szimmetriatengelyen, azaz a szimmetriatengelyek mind egy ponton mennek át.

Az S halmaz tetszőleges két A, B pontja egyenlő távolságra van P-től, mert P a felező merőlegesükön van. Tehát S pontjai mind ugyanakkora távolságra vannak P-től, azaz egy P körüli körön vannak.

Tegyük fel, hogy A, B, C három S-beli egymás melletti pont a körön – azaz a B-t tartalmazó AC íven a B-n kívül nincs más S-beli pont –, amelyekre $APB\sphericalangle < BPC\sphericalangle$. Ekkor legyen az AC ív felezőpontja F. Feltevésünk miatt B az AF íven fog elhelyezkedni, tehát ha az AC szakasz felező merőlegesére tükrözzük (ez éppen a PF egyenes), a tükörkép az FC íven lesz, nevezzük B'-nek. Az AC szakasz felező merőlegese szimmetriatengelye S-nek, tehát B' szükségképpen benne van az S ponthalmazban. Ez viszont ellentmond azon feltevésünknek, hogy A, B, C három egymás melletti pont a körön, mivel B' az FC íven van. Tehát $APB\sphericalangle = BPC\sphericalangle$ tetszőleges egymás melletti pontokra, azaz a szomszédos pontokat összekötő ívek hossza egyenlő, az S pontjai egy szabályos sokszög csúcsai.

Megmutatjuk, hogy a szabályos n-szögek eleget is tesznek a feladat feltételeinek.

Két egymás melletti Q és R pontra $QPR\sphericalangle = \dfrac{2\pi}{n}$, és két tetszőleges csúcspont és a középpont által meghatározott szög ennek egész számszorosa.

Az A, B, C pontok legyenek S tetszőleges pontjai. Legyen

$$APB\sphericalangle = k \cdot \frac{360^\circ}{n}, \quad APC\sphericalangle = \ell \cdot \frac{360^\circ}{n}.$$

Ekkor AB felezőmerőlegesére tükrözve C-t, C'-höz jutunk,

$$BPC'\sphericalangle = APC\sphericalangle = \ell \cdot \frac{360^\circ}{n}.$$

Tehát C' szintén pontja a szabályos n-szögnek, mert a $BPC'\sphericalangle$ $\dfrac{360^\circ}{n}$ többszöröse, és B pontja a szabályos n-szögnek. Tehát az AB szakasz felezőmerőlegesére szimmetrikus lesz a szabályos n-szög.

Tehát ezek az S ponthalmazok éppen a szabályos n-szögek csúcspontjai, ahol $n \geq 3$.

Devecsery András megoldása