

Legyen az  $M$  pont az  $AB$  szakasz  $B$ -n túli meghosszabbításának az a pontja, amelyre  $BM = BP$ . Hasonlóan legyen  $N$  az  $AQ$  szakasz  $Q$ -n túli meghosszabbításának az a pontja, amelyre  $BQ = QN$ . A  $BQC$  szög felezője messe  $BC$ -t  $S$ -ben.

Legyen  $BPM\angle = \varphi$ , ekkor  $BM = BP$  miatt  $BMP\angle = \varphi$  és  $PBA\angle = 2\varphi$ . Tehát  $QBC\angle = \varphi$ . A  $QBS$  és a  $QNS$  háromszögek egybevágók, mert  $QB = QN$ , a  $QS$  oldaluk közös, továbbá  $SQB\angle = NQS\angle$ . Tehát  $QBS\angle = QNS\angle = \varphi$ . Így az  $AMP$  háromszög és az  $ANP$  háromszög is egybevágó, mert az

$$AM = AB + BM = AB + BP = AQ + BQ = AQ + QN = AN$$

oldalak egyenlőek, közös az  $AP$  oldaluk, és egyenlő az  $A$ -nál levő szögük. Ezért  $AMP\angle = ANP\angle = \varphi$ .

Tehát  $QNP\angle = QNS\angle = \varphi$ . Ekkor két eset lehetséges:  $P = S$  vagy  $P \neq S$ , és így  $P, S, N$  egy egyenesen vannak.

Ha  $P = S$ , akkor a  $BQP$  és a  $QPN$  háromszögek, valamint az  $APM$  és  $APN$  háromszögek egybevágóságából kapjuk, hogy  $BP = PN = PM$ , azaz  $BP = PM = BM$ , azaz az  $ABC$  háromszög  $B$ -nél lévő szöge  $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ , ami nem lehetséges, mert így  $ABC\angle + BAC\angle = 180^\circ$ .

Tehát  $P, S, N$  egy egyenesen vannak, azaz  $N = C$ . Így  $ABC\angle = ANS\angle = \varphi$ , azaz  $180^\circ - BAC\angle + ABC\angle + ACB\angle = 60^\circ + 2\varphi + \varphi$ . Innen  $\varphi = 40^\circ$  és  $2\varphi = 80^\circ$ . Tehát az egyetlen lehetséges megoldás, hogy  $ABC\angle = 80^\circ$ ,  $ACB\angle = 40^\circ$  és  $BAC\angle = 60^\circ$ .

Ez a megoldás jó is, mert a  $QBC\angle = QCB\angle$  összefüggésből kapjuk, hogy  $BQ = QC$ . Továbbá az  $APM$  és  $APC$  háromszög egybevágó, mert két szögük, az  $A$ -nál, valamint az  $M$  és  $C$ -nél levő szögek megegyeznek, és van egy közös oldaluk:  $AP$ . Tehát  $AB + BP = AB + BM = AM = AC = AQ + QC = AQ + QB$ .

Tehát az egyetlen megoldás a  $60^\circ, 80^\circ, 40^\circ$ -os háromszög.

*Csikvári Péter (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.)*

