[1] Legyen az $n!$ permutáció $A_1, A_2, \ldots, A_{n!}$. Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz, vagyis $n! \not| S(A_i) - S(A_j)$, ahol $i \neq j$. Mivel $n!$ permutáció van, és $n!$-féle maradék $n!$-sal osztva, ez csak úgy lehetséges, hogy minden maradék pontosan egyszer fordul elő.

Így egyrészt

$$\sum_{i=1}^{n!} S(A_i) \equiv 1 + \cdots + n! \equiv \left(\frac{n!+1}{2}\right) n! \not\equiv 0 \pmod{n!},$$

mivel $\frac{n!+1}{2}$ nem egész, hiszen $n!+1$ páratlan.

Másfelől az $1, 2, \ldots, n$ számok mindegyike $(n-1)!$ permutációban szerepel adott k_i szorzóval, vagyis

$$\sum_{i=1}^{n!} S(A_i) = (n-1)! \cdot \sum_{i=1}^{n} k_i(1+2+\cdots+n) = (n-1)! \cdot \frac{(n+1)}{2} \cdot n \cdot \sum_{i=1}^{n!} k_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{n!} k_i \cdot n! \cdot \left(\frac{n+1}{2}\right) \equiv 0 \pmod{n!},$$

hiszen $\frac{n+1}{2}$ egész.

Ellentmondásra jutottunk, hiszen a tagokat kétféle módon összeadva eltérő maradékokat kaptunk $n!$-sal osztva, vagyis a feltevésünk nem teljesül, tehát az állítás igaz.

Kovács Erika Renáta (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.)

---

[1]A megoldás során a feladat eredeti szövegétől eltérően a permutációkat nagybetűkkel jelöljük.