A szimmetria miatt feltehetjük, hogy $a \geq b \geq c$.

1. eset: $a + b \leq 8c$. Ekkor $a^2 + 8bc \leq b^2 + 8ca$, hiszen ebből ekvivalens lépésekkel $0 \leq b^2 - a^2 + 8ac - 8bc$, $0 \leq (a-b)(8c-a-b)$-t kapjuk, ami nyilvánvalóan igaz. Hasonló meggondolásokból, felhasználva a $b + c \leq 8a$ összefüggést, $b^2 + 8ca \leq c^2 + 8ab$ is igaz, tehát a, b, c azonosan rendezett a $\frac{1}{\sqrt{a^2+8bc}}$, $\frac{1}{\sqrt{b^2+8ca}}$, $\frac{1}{\sqrt{c^2+8ab}}$ számokkal, így a Csebisev-egyenlőtlenségből:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq$$
$$\geq \frac{1}{3}(a+b+c)\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{1}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{1}{\sqrt{c^2+8ab}}\right).$$

Felhasználva a harmonikus és négyzetes közepek közti egyenlőtlenséget:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{1}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{1}{\sqrt{c^2+8ab}}\right) =$$
$$= \frac{1}{\frac{3}{\frac{1}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+8ab}}}} \geq \frac{1}{\sqrt{\frac{(a^2+8bc)+(b^2+8ca)+(c^2+8ab)}{3}}}.$$

Elég tehát belátni, hogy

$$\frac{a+b+c}{\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+8ab+8bc+8ca}{3}}} \geq 1.$$

Ezt rendezve $\sqrt{3}(a+b+c) \geq \sqrt{a^2+b^2+c^2+8ab+8bc+8ca}, 3(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca) \geq a^2+b^2+c^2+8ab+8bc+8ca, 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca \geq 0, (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0, aminyilvnval.$

2. eset: $8c < a + b$. Ekkor

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} > \frac{a}{\sqrt{a^2+b(a+b)}} > \frac{a}{\sqrt{(a+b)^2}} = \frac{a}{a+b}.$$

Hasonlóan $\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} > \frac{b}{a+b}$, tehát

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} > \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = 1.$$

Ezzel az állítást beláttuk.

Csóka Endre (Debrecen, Fazekas M. Gimn., 10. o.t.)