Kibontva $ac+bd$ szorzatalakját, majd rendezve az egyenlőséget a következőhöz jutunk:

$$a^2+b^2-ac=b^2+d^2+bd. \tag{1}$$

(1)-ben pozitív egészek egyenlősége áll, és nyilván

$$a^2+c^2-2ac\cos 60^\circ=b^2+d^2-2bd\cos 120^\circ.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy létezik olyan e hosszúságú szakasz, hogy az a, c, e oldalú háromszögben e-vel szemben 60°-os, a b, d, e oldalú háromszögben pedig e-vel szemben 120°-os szög van. Így az ábrán látható a, c, b, d oldalú, e átlójú négyszög húrnégyszög (két szemközti szögének az összege 180°). Használhatjuk tehát Ptolemaiosz tételét: ha f a másik átló hossza, akkor

$$ab+cd=ef. \tag{2}$$

Most számoljuk ki f hosszát. Két koszinusztételt felírva:

$$a^2+d^2-2ad\cos\varphi=f^2=b^2+c^2+2bc\cos\varphi.$$

Ebből $\cos\varphi$-re a következő érték adódik: $\cos\varphi=\dfrac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}$, amit visszahelyettesítve:

$$f^2=a^2+d^2-2ad\cdot\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}=\frac{a^2bc+bcd^2+ab^2d+ac^2d}{ad+bc}==\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}. \tag{3}$$

Ezt a kifejezést írjuk be (2) négyzetébe:

$$(ab+cd)^2=e^2f^2=e^2\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}.$$

Osztva $(ab+cd)$-vel:

$$ab+cd=\frac{(ac+bd)\cdot e^2}{ad+bc}. \tag{4}$$

Legyen $P=ab+cd$, $Q=ac+bd$, $R=ad+bc$ és $E=e^2$. Ekkor P, Q, R, E pozitív egészek, és (4) szerint

$$PR=EQ. \tag{5}$$

Mivel $P-Q=(a-d)(b-c)$ és $Q-R=(a-b)(c-d)$, azért $a>b>c>d$ miatt $P>Q>R>0$, és így (5)-ből $E>R>0$.

Ha P prím, akkor $P\mid EQ$ miatt $P\mid E$ vagy $P\mid Q$, és így $R=\dfrac{E}{P}\cdot Q=E\cdot\dfrac{Q}{P}$ alapján $Q\mid R$ vagy $E\mid R$. Mivel láttuk, hogy mind Q, mind pedig E nagyobb R-nél, egyik oszthatóság sem állhat fenn, P tehát valóban nem lehet prímszám.

Harangi Viktor (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.)